Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Quatérnios: propriedades algébricas, geométricas e aplicações

Rafael Ferreira Cardoso[1]
ICEx/UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz[2]
ICEx/UNIFAL-MG, Alfenas, MG

O presente trabalho nasceu do mútuo interesse entre os autores de contribuir à comunidade acadêmica e, mais especificamente, aos estudos sobre o conjunto dos *números quatérnios*, que denotaremos por $\mathbb{H}$. Também conhecidos como *quaterniões*, essas entidades numéricas são dotadas de três unidades imaginárias que podem ser associadas a um espaço tridimensional tornando, assim, a manipulação de quatérnios uma ferramenta interessante para a sistematização e estudo das rotações em três dimensões. Além das contribuições matemáticas que o trabalho visa, é sabido também que diversos problemas científicos de ordem computacional, robótica e da mecânica quântica, requisitam o tratamento de números complexos ou, ainda, hipercomplexos. Por isso é que este trabalho se faz útil, para fomentar as bases de pesquisas desta classe numérica extremamente rica e versátil.

Para o tratamento algébrico dos $\mathbb{H}$, torna-se necessária a revisão de conceitos primordiais da matemática elementar. É por isso que, de antemão, permearemos por temas interligados e relacionados à álgebra propriamente dita, usando como referência os escritos de [3] que nos apresenta os conceitos de grupos, anéis e corpos dos quais necessitamos. Consolidando, portanto, as bases para o estudo da álgebra dos quatérnios. Eles poderão ser interpretados a partir daí como números regidos por uma parte escalar e outra vetorial determinada pelos coeficientes das unidades imaginárias que denominaremos i, j e k. Em linhas gerais, adotaremos a forma para qualquer $q \in \mathbb{H}$ como:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \; ; \qquad \text{onde } q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Abordaremos também as principais características desses números que de maneira direta influenciam na aplicabilidade de seu respectivo tratamento algébrico. É o caso da propriedade mais primitiva proposta por William Rowan Hamilton em 1843, que desencadeou a criação dos quatérnios e ficou historicamente conhecida por ter sido pensada e gravada na Brougham Bridge enquanto Hamilton realizava um passeio pelo Canal Real em Cabra, Dublin, sua cidade natal. [1] Localizada na Irlanda, a ponte possui atualmente um memorial gravado com a propriedade básica dos quatérnios, sendo ela:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \tag{2}$$

Quando o matemático propôs a criação dos $\mathbb{H}$, a grande inovação de sua nova álgebra estava, curiosamente, no abandono da comutatividade com relação à multiplicação. O que, de início, pode parecer uma perda irreversível de propriedades fundamentais acabou por apresentar à álgebra e à geometria uma nova ferramenta de tratamento espacial.

Após enunciarmos os expostos até aqui, utilizaremos [4] e [5] para introduzirmos os princípios básicos dos quatérnios e analisarmos suas propriedades geométricas. Voltando a ideia da não comutatividade entre os números $\mathbb{H}$, que a multiplicação possui propriedade cíclica, ou seja, podemos relacionar as unidades imaginárias à um ciclo de sucessivas multiplicações, da seguinte forma:

[1]rafael.cardoso@discentes.unifal-mg.edu.br.
[2]catia@unifal-mg.edu.br.

$$ijk = jki = kij = -ikj = -kji = -jik. \qquad (3)$$

Como citado anteriormente, os quatérnios estão amplamente associados a áreas diversas do conhecimento, desde a cinemática até as geodésias. Com respeito a robótica e, de forma geral, a computação, podemos citar como uma das principais aplicações o estudo da posição de objetos no espaço, ou seja, a atitude. Em [2], vemos que o empenho dos escritos estão voltados à um algoritmo conhecido como QUEST (QUaternion ESTimate), o qual, segundo o próprio autor, se baseia em um certo ângulo/eixo descrito através de quatérnios para determinação da atitude. Por exemplo, vemos que esse tipo de abordagem é extremamente importante "para os veículos aeroespaciais, a estimativa da atitude é essencial para implementar leis de controle para navegação inercial".

Mais ainda, é pontuado que algoritmos baseados em quatérnios propiciam uma redução de custos computacionais uma vez que as operações necessárias para se determinar a atitude requerem um número inferior de parâmetros superando, assim, a eficácia das matrizes de atitude que necessitam, basicamente, do dobro de parâmetros. Porém, eles possuem a chamada deficiência da dualidade, ou seja, "quatérnios com sinal oposto representam a mesma atitude". E é então que [2] se compromete a apresentar uma possível solução para os resultados duais.

Ainda falando em aplicações, em [6] a ordem dos quatérnios de Hamilton, também chamada inteiros de Lipschitz, é utilizada para a construção de códigos geometricamente uniformes, estes relacionados à geometria euclidiana e, em [7] são utilizados quocientes de ordens dos quatérnios sobre corpos de números para a construção de códigos geometricamente uniformes no plano hiperbólico, que mostram ter um melhor desempenho.

Ademais, concluímos que os quatérnios constituem um conjunto numérico de larga importância que, devido a suas características algébricas, é interpretado e explorado de maneiras variadas no intuito de atender as necessidades de cada aplicação. Por conseguinte, surge a necessidade de fomentar as bases de pesquisas de cunho algébrico quaterniônico, ou seja, estudos sobre $\mathbb{H}$ e o possível aprimoramento de modelos matemáticos fornecerão novas ferramentas para a física, a computação, a robótica, as engenharias, a telecomunicação, a aeronáutica entre outros.

Referências

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática, 2a edição.* Edgar Blucher, São Paulo, volume 1, capítulo 26, páginas 421-423, 1996.

[2] Campos, L. J. E. Análise de componentes quaterniônicos em algoritmos de atitude: uma solução simples para o problema de dualidade nos resultados do algoritmo QUEST, Monografia, UFSJ, 2017.

[3] Domingues, H. H., Iezzi, G. *Álgebra Moderna, 4a. edição.* Atual, São Paulo, 2003.

[4] Dos Santos, M. V. Números complexos, quatérnios e rotações, Monografia, UFSC, 2012.

[5] Da Silva, A. C., Pereira, J. M., Saraiva, L. F. L. Os complexos, os quatérnios e os octônios: os números imaginários, Monografia, UNIFAP, 2012.

[6] Martínez, C., Beivide, R., Gabidulin, E. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 55:3552-3562, 2009.

[7] Quilles Queiroz, C., Palazzo, R. Codes over Graphs Derived from Quotient Rings of the Quaternion Orders, *ISRN Algebra*, 2012:1-14, 2012.