Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Descrição matemática da decomposição própria ortogonal (*proper orthogonal decomposition*)

Daniel Ammirante da Cunha[1]
PPGMAT/UNIFESP, São José dos Campos, SP
Cláudia Aline A. S. Mesquita[2]
PPGMAT/UNIFESP, São José dos Campos, SP

1 Introdução

Decomposição Ortogonal Própria (*Proper Orthogonal Decomposition*-POD) é um poderoso método para obter Modelos de Ordem Reduzida [3]. O POD é um método baseado em dados (*data-based*); ou seja, baseado em padrões dos dados gerados por experimentos ou simulações. Esses dados são obtidos pela excitação do sistema físico por meio de entradas externas ou distúrbios nas variáveis do problema. A ideia principal do POD é obter uma base ortonormal (conjunto ortonormal total) que representa os principais padrões do conjunto de dados de forma "ótima", no sentido de mínimos quadrados. A fim de criar o modelo de ordem reduzida, assume-se que a variável da equação diferencial pode ser aproximada por meio de uma combinação linear finita da base ortonormal. O modelo de ordem reduzida é obtido utilizando essa aproximação e projetando as equações no subespaço de dimensão finita com a projeção de Galerkin. Dessa forma, o POD *decompõe* os dados em um conjunto *ortogonal* de padrões que são ordenados pelo nível de importância de cada padrão para os *próprios* dados.

2 Resultado principal

O resultado principal do trabalho [1] é dado pelo seguinte Teorema

Teorema 1. *Seja H um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{V}_P \subset H$ um subconjunto de dados. Se os elementos de $\mathcal{V}_P$ puderem ser parametrizados tal que $y \in L^2(\mathcal{I}, H)$, e se o operador média comuta com o produto interno, então*

(i) existe solução do problema de otimização dado pelo ℓ-tamanho de Kolmogorov

$$\delta_\ell(\mathcal{V}^\ell; H) = \inf_{\mathcal{B}^\ell \subset H} \left\langle \left\| y(t) - \sum_{j=1}^{\ell} (y(t), \phi_j)_H \phi_j \right\|^2 \right\rangle_{\mathcal{V}_P} \tag{1}$$

denotada por $\mathcal{B}^\ell = \{\phi_j\}_{j=1}^{\ell}$. Esta é conhecida como base POD, e

[1]daniel.ammirante@gmail.com
[2]caas.mesquita@unifesp.br

(ii) o conjunto $\mathcal{B}^\ell$ é formado pelo conjunto ortonormal dos ℓ autovetores associados aos ℓ primeiros (maiores) autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\ell}$ do operador POD

$$\mathcal{R}\phi = \Big\langle y(t)\big(\phi, y(t)\big)_H \Big\rangle_{\mathcal{V}_P} \qquad para\ \phi \in H; \tag{2}$$

(iii) Além disso, o ℓ-tamanho de Komogorov satisfaz

$$\delta_\ell(\mathcal{V}^\ell; H) = \inf_{\mathcal{B}^\ell \subset H} \left\langle \left\| y(t) - \sum_{j=1}^{\ell} (y(t), \phi_j)_H \phi_j \right\|^2 \right\rangle_{\mathcal{V}_P} = \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \lambda_j \tag{3}$$

3 Aplicações

O Teorema 1 foi aplicado em dois problemas: a equação da onda unidimensional em um domínio limitado; e a vibração livre não-amortecida de uma estrutura (linear e não-linear). A Figura 1 mostra um exemplo comparando a solução analítica da equação da onda em 6 instantes de tempo com a solução obtida pelo modelo de ordem reduzida utilizando um subespaço de dimensão finita $\ell = 3$ com a base POD e a base de Fourier. Em que é possível observar, que com um mesmo número de modos, o POD conseguiu aproximar "melhor" a solução analítica. A Figura 2 mostra um exemplo do espaço de fase da solução da vibração livre não-amortecida de uma estrutura não-linear com 2 graus de liberdade junto com a base POD (autovetores), neste caso é possível verificar que os autovalores do operador POD representam as direções principais do movimento.

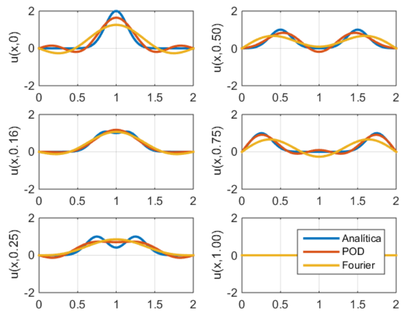

Figura 1: Equação da onda unidimensional

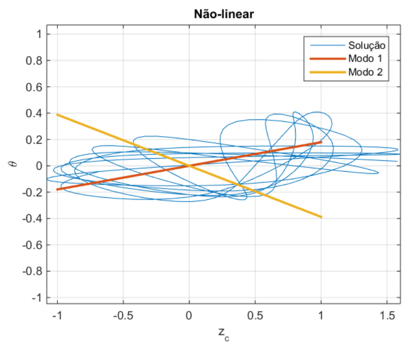

Figura 2: Espaço de fase da solução de vibração livre não-amortecida

Referências

[1] Cunha, D. A. Um Estudo Sobre Proper Orthogonal Decomposition: Fundamentação Teórica. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo. São José dos Campos, p. 167, 2020.

[2] Gräßle, C. Adaptivity in Model Order Reduction with Proper Orthogonal Decomposition, Tese de Doutorado, Department of Mathematics University of Hamburg, 2019.

[3] Kunisch, K and Volkwein, S. Proper Orthogonal Decomposition for Linear-Quadratic Optimal Control, *Model Reduction and Approximation*, SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, chapter 1, pages 3-63, 2017.

