Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação do Método Preditor Corretor a um Problema de Otimização de Portfólio

Fernando Ribeiro Freitas[1]
Mestrando do PROFMAT - UFMS
Rubia Mara de Oliveira Santos[2]
Instituto de Matemática, UFMS

1 Introdução

Um problema de programação linear consiste em determinar uma solução que maximize ou minimize uma função linear, conhecida como função objetivo, sujeita a um conjunto de restrições, que podem ser equações e/ou inequações lineares. Problemas modelados como problemas de programação linear são encontrados em diversas áreas, para determinar o lucro máximo, custo mínimo, fluxo máximo, caminho mínimo, alocação de recursos, entre outros. Assim, o desenvolvimento de métodos eficientes e robustos para resolução destes problemas se faz necessário [2].

Em 1984, Karmarkar [3] apresentou um algoritmo alternativo para a programação linear. A publicação deste algoritmo iniciou uma linha de pesquisa conhecida como método de pontos interiores, e após uma década os métodos primais-duais se estabeleceram como os métodos mais significativos e úteis dentre os métodos de pontos interiores.

O objetivo deste trabalho é aplicar o Método de Ponto Interior Preditor Corretor, uma variante do método primal-dual, para resolver um problema de otimização de portfólio. O problema de otimização de portfólio consiste em otimizar a diversificação da carteira de investimentos. As decisões devem ser tomadas baseadas no risco e retorno dos investimentos, cujo o objetivo é maximizar o lucro esperado nestes investimentos.

2 Método Preditor Corretor

Um *ponto interior* satisfaz a condição que toda variável encontra-se estritamente dentro de seus limites. Os métodos de pontos interiores necessitam de um ponto inicial viável interior, os do tipo primal-dual baseia-se em aplicar o método de Newton às condições de otimalidade de um problema de programação linear dadas por:

$$\begin{cases} Ax = b, & x \geq 0 \\ A^t y + z = c, & z \geq 0 \\ XZe = 0 \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^m$, $X = diag(x)$, $Z = diag(z)$ e $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $e = (1, 1, ..., 1)^t$, iniciando de um ponto interior e mantendo interior a cada interação.

[1]fernandofreitas.frf@gmail.com
[2]rubia.oliveira@ufms.br

O método Preditor Corretor desenvolvido por Mehotra [4] fundamenta-se em utilizar uma direção composta por três componentes: direção afim-escala (direção de Newton), direção de centragem e direção de correção não-linear. Assim, aplicando o método de Newton:

$$\begin{cases} A\tilde{d}_x = r_p \\ A^t\tilde{d}_y - \tilde{d}_z = r_d \\ Z\tilde{d}_x + X\tilde{d}_z = r_a \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ c - A^t y - z \\ -XZe \end{bmatrix}$$

Eliminando variáveis, o problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_y &= (ADA^t)^{-1}[r_p + AD(r_d + X^{-1}r_a)] \\ \tilde{d}_x &= D(A^t\tilde{d}_y - r_d + X^{-1}r_a) \\ \tilde{d}_z &= X^{-1}(r_a - Z\tilde{x}) \end{aligned}$$

onde $D = XZ^{-1}$, a matriz ADA^t é simétrica e positiva, pois A tem posto completo e D é uma matriz diagonal positiva [5].

Para uma melhor progressão do método é acrescentado uma pertubação μ nas condições de otimalidade. Assim, a direção preditora corretora é dada pela soma da direção afim $(\tilde{d})$ e da direção corretora $(\widehat{d})$, ou seja, $d = \tilde{d} + \widehat{d}$. Portanto, d é determinada pelo sistema:

$$\begin{cases} Ad_x = r_p \\ A^t d_y - d_z = r_d \\ Zd_x + Xd_z = r_a + \mu e - \tilde{D}_x\tilde{D}_z e \end{cases} \quad \text{onde } \tilde{D}_x = diag(\tilde{d}_x) \text{ e } \tilde{D}_z = diag(\tilde{d}_z).$$

3 Conclusão

Espera-se a eficiência do Método de Ponto Interior Preditor Corretor, pois ele pode ser utilizado tanto para problemas com poucas restrições, tanto para problemas com maiores restrições, e a rápida convergência para a solução desejada quando aplicado em problemas de portfólio, devido a necessidade de gerenciar de modo eficiente a carteira de investimentos.

4 Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul pelo incentivo e pela oportunidade de trilhar o caminho da pesquisa científica.

Referências

[1] *Adler,I., Karmarkar N., Resende,M.G.C. and Veiga, G.* An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297-335, 1989.

[2] *Berti, L.F. Redução de Iterações dos Métodos de Pontos Interiores com Iteração continuada*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2016.

[3] *Karmarkar, N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373-395,1984.

[4] *S. Mehrotra* On the implementation of a primal-dual interior point method. SIAM Journal on Optimization, 2(4):575-601, 1992

[5] *Silva, Jair da. Uma família de algoritmos para programação linear baseada no algoritmo de Von Neumann*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2009.