Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelo de Crescimento e Mortalidade de Populações Estruturadas por Estágios em derivadas Fracionárias

Matheus Tobias Mendonça[1]
UFJF, Juiz de Fora, MG
Sandro Rodrigues Mazorche[2]
Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

Apresentaremos um estudo do modelo de dinâmica de população marinha (PDPM), baseando no trabalho [2]. Esta abordagem divide a população em dois estágios, por exemplo, náuplios e estágio juvenil. A quantidade de organismos em cada um dos dois estágio, $\{1, 2\}$, em qualquer instante de tempo, $t \geq 0$, é representado pelas funções $X_1(t)$ e $X_2(t)$. O modelo (1) descreve essa dinâmica:

$$\begin{cases} X_1'(t) = -(K_{01} + K_{21})X_1(t) \\ X_2'(t) = K_{21}X_1(t) - K_{02}X_2(t) \\ X_1(0) = X_1^0 \ , \ X_2(0) = X_2^0 \end{cases} \tag{1}$$

onde K_{ij} são constantes positivas e representam taxas vitais, neste caso a taxa de crescimento é dada por K_{21}, enquanto K_{0j}, $j \in \{1, 2\}$, representam taxa de mortalidade no j-ésimo estágio. No trabalho [1] foi apresentado um método para estimar as taxas vitais (crescimento e mortalidade) do problema da dinâmica de população marinha (PDPM) com dois estágios. Nosso estudo iniciará com as taxas geradas por [1] e com uma descrição deste modelo em derivadas fracionárias tipo Caputo. Mas antes de apresentarmos o modelo, será útil ter em mente as seguintes definições [3].

Definição 1: A Derivada Fracionária de ordem $\alpha \geq 0$, no sentido de Caputo, é:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \text{se} \quad \alpha \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau & \text{se} \quad n-1 < \alpha < n;\, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Definição 2: Função de Mittag-Leffler com dois: Seja $x \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dois parâmetros tais que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0$. Definimos a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros através da série de potência

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \tag{3}$$

Particularmente, quando $\beta = 1$, obtemos a função Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por $E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x)$. Observamos que esta função generaliza a função exponencial, sendo igual à exponencial quando $\alpha = \beta = 1$.
O modelo em derivadas fracionárias é escrito como segue, onde D^α denota ${}_0^C D_t^\alpha$:

$$\begin{cases} D^\alpha X_1(t) = -(K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha)X_1(t) & , \\ D^\alpha X_2(t) = K_{21}^\alpha X_1(t) - K_{02}^\alpha X_2(t) & , \\ X_1(0) = X_1^0 \ , \ X_2(0) = X_2^0 \end{cases} \tag{4}$$

[1]tobias@ice.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.edu.br

Usando as seguintes relações da Transformada de Laplace na derivada fracionária de Caputo e na função de Mittag-Leffer:

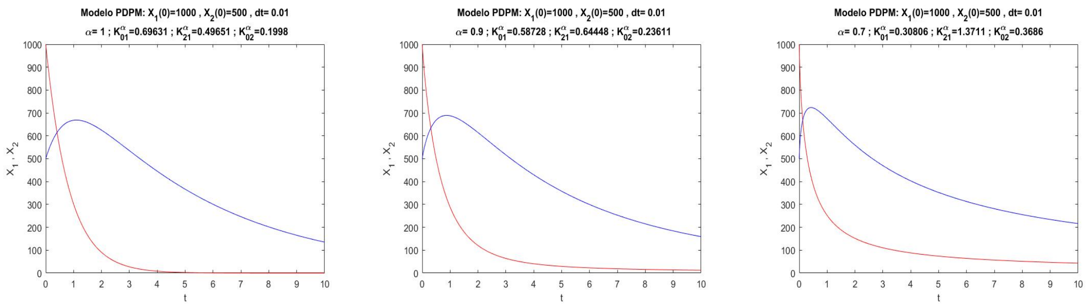
$$\mathcal{L}[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \tag{5}$$

E após aplicamos a Transformada de Laplace nas equações (4) e fazendo umas operações algebricas obtemos a solução do PDPM. Em particular, quando $\alpha = 1$ temos a solução do modelo (1) como apresentado em [2].

$$\begin{cases} X_1(t) = X_1(0) E_\alpha(-(K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha) t^\alpha) \\ X_2(t) = \frac{K_{21}^\alpha (X_1(0) - X_2(0)) + X_2(0)(K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha)}{K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha - K_{02}^\alpha} E_\alpha(-K_{02}^\alpha t^\alpha) - \frac{K_{21}^\alpha X_1(0)}{K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha - K_{02}^\alpha} E_\alpha(-(K_{01}^\alpha + K_{21}^\alpha) t^\alpha) \end{cases} \tag{6}$$

Como resultado numérico, construímos um código no Octave com uma pequena modificação do esquema-L1, [3], para discretizar o modelo (PDPM) fracionário, e acoplamos junto aos outros codigo de [1]. As figuras 1(a), 1(b) e 1(c) mostram o comportamento da solução para diferentes valores dos parâmetros do modelo. Futuramente iremos estudar o quanto estes parâmetros afeta o comportamento das soluções, bem como expandir o modelo para mais estágios.

Figura 1: Modelo PDPM



(a) caso $\alpha = 1$ (b) caso $\alpha = 0.9$ (c) caso $\alpha = 0.7$

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora, por concedernos a bolsa PIBIC com qual apoia nossa pesquisa.

Referências

[1] ALVES J.S.C.,PACHAS D.A.G.and MAZORCHE S. R.. Estimativas de Crescimento e Mortalidade de Populações Estruturadas por Estágios, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2018.

[2] B. J. Rothschild, A. F. Sharov, A. J. Kearsley, e A. S. Bondarenko. Estimating Growth and Mortality in Stage-Structured Populations. *Journal of Plankton Research* , 1997.

[3] Oldham, K.; Spanier, J. *The fractional calculus theory and applications ofdifferentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.

