Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O notável ponto de Jacobi de um triângulo

Sandra Lieven[1]
Colégio Albert Sabin, São Paulo, SP
Márcio Fabiano da Silva[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

1 Introdução

Carl Friedrich Andreas Jacobi (1795-1855) foi um matemático alemão que dedicou boa parte do seu trabalho ao estudo da geometria triangular. Em um de seus trabalhos, a partir dos vértices de um triângulo qualquer, Jacobi constrói um novo triângulo, o qual é conhecido como triângulo de Jacobi em sua homenagem. Este triângulo foi objeto de estudo da dissertação de mestrado do PROFMAT, Triângulo de Jacobi, [1], em que, a partir dos pontos notáveis clássicos, apresentam-se outros pontos notáveis, abordando com maior profundidade o chamado ponto de Jacobi de um triângulo. Mais especificamente, temos o seguinte resultado, cuja prova é encontrada em [1] e [2].

Teorema 1.1. *(Teorema de Jacobi) Dado $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, sejam A', B' e C' pontos tais que med$(\angle C'AB) =$ med$(\angle CAB') = \alpha$, med$(\angle A'BC) =$ med$(\angle C'BA) = \beta$ e med$(\angle B'CA) =$ med$(\angle A'CB) = \gamma$, sendo α, β e γ números reais entre 0 e π. O triângulo $\triangle A'B'C'$ é chamado de triângulo de Jacobi para o triângulo $\triangle ABC$ e as retas $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes num ponto K, que é chamado de Ponto de Jacobi do triângulo $\triangle A'B'C'$ (como ilustrado na Figura 1).*

A existência de K é garantida pelo clássico Teorema de Ceva.

2 Coordenadas Baricêntricas no Triângulo de Jacobi

Nosso próximo objetivo é obter as coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi K de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer. Para isso, apresentaremos as coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo de Jacobi A', B' e C' no caso em que estes são externos ao triângulo $\triangle ABC$. O outro caso é análogo.

Definição 2.1. *Sendo $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e P um ponto qualquer com coordenadas cartesianas (x, y). Dizemos que u, v e w são as coordenadas baricêntricas de P, em relação ao triângulo $\triangle ABC$, se*

$$P = (x, y) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Definição 2.2. *Sejam L, M e N três pontos distintos do plano e (LMN) a área (euclidiana) do triângulo $\triangle LMN$. Definimos a área com sinal do triângulo $\triangle LMN$ como*

$$S_{LMN} = \begin{cases} 0, & \text{se } L, M \text{ e } N \text{ são pontos colineares;} \\ +(LMN), & \text{se } L, M \text{ e } N \text{ estão dispostos no sentido anti-horário;} \\ -(LMN) & \text{se } L, M \text{ e } N \text{ estão dispostos no sentido horário.} \end{cases}$$

[1]sandralieven@gmail.com
[2]marcio.silva@ufabc.edu.br

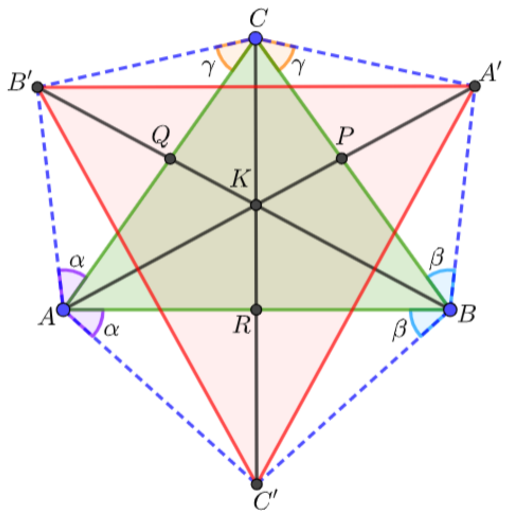

Figura 1: O triângulo $\triangle A'B'C'$ é um triângulo de Jacobi construído a partir do triângulo $\triangle ABC$.

Nas condições do Teorema 1.1, da Definição 2.1, da Definição 2.2, sendo $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, Δ a área do triângulo $\triangle ABC$, $X = 2\Delta(cot\alpha + cot(\angle BAC))$, $Y = 2\Delta(cot\beta + cot(\angle ABC))$, $Z = 2\Delta(cot\gamma + cot(\angle ACB))$ e aplicando-se a lei dos senos ao triângulo $\triangle A'BC$, obtemos

$$A' = \left(\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} : \frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}}\right) = A'B \cdot \left(-\frac{a \cdot sen\beta}{2\Delta} : \frac{sen\beta \cdot sen(\gamma + \angle ACB)}{a \cdot sen\gamma \cdot sen(\angle ACB)} : \frac{sen(\beta + \angle ABC)}{a \cdot sen(\angle ABC)}\right)$$
$$= \left(-a^2 : \frac{2\Delta \cdot sen(\gamma + \angle ACB)}{sen\gamma \cdot sen(\angle ACB)} : \frac{2\Delta \cdot sen(\beta + \angle ABC)}{sen\beta \cdot sen(\angle ABC)}\right)$$
$$= (-a^2 : 2\Delta(cot(\angle ACB) + cot\gamma) : 2\Delta(cot(\angle ABC) + cot\beta)) = (-a^2 : Z : Y).$$

Analogamente,

$$B' = (Z : -b^2 : X) \ \text{ e } \ C' = (Y : X : -c^2).$$

Proposição 2.3. *As coordenadas baricêntricas* $(u : v : w)$ *do ponto de Jacobi são* $K = \left(\frac{1}{X} : \frac{1}{Y} : \frac{1}{Z}\right)$.

Demonstração. Em coordenadas baricêntricas, a equação da reta $\overleftrightarrow{AA'}$ é $ru + sv + tw = 0$. Mas, $A = (1 : 0 : 0) \in \overleftrightarrow{AA'}$, donde $r = 0$, e $A' = (-a^2 : Z : Y) \in \overleftrightarrow{AA'}$, donde $t = -\frac{sZ}{Y}$. Logo, $\overleftrightarrow{AA'} : sv - \frac{sZ}{Y}w = 0$. Como $s \neq 0$, obtemos $\overleftrightarrow{AA'} : (0 : \frac{Z}{Y}w : w) \overset{\cdot Y}{=} (0 : Zw : Yw) \overset{\cdot \frac{1}{w}}{=} (0 : Z : Y)$.

Analogamente, $\overleftrightarrow{BB'} : (\frac{Z}{X}w : 0 : w) \overset{\cdot X}{=} (Zw : 0 : Xw) \overset{\cdot \frac{1}{w}}{=} (Z : 0 : X)$. Assim, $K = (u : v : w) = \left(\frac{Zw}{X} : \frac{Zw}{Y} : w\right) \overset{\cdot \frac{1}{w}}{=} \left(\frac{Z}{X} : \frac{Z}{Y} : 1\right) \overset{\cdot \frac{1}{Z}}{=} \left(\frac{1}{X} : \frac{1}{Y} : \frac{1}{Z}\right)$. □

Referências

[1] Lieven, S. Triângulo de Jacobi, Dissertação de Mestrado, UFABC, 2019.

[2] Vickers, G. T. Reciprocal Jacobi Triangles and the McCay Cubic, *Forum Geometricorum*, 15: 179–183, 2015.