

## Ajuste de curvas pelo método dos Quadrados Mínimos: Uma aplicação com dados populacionais de Mato Grosso do Sul

Paulo Felipe Toro<sup>1</sup>

UNESP/IBB, Botucatu, SP

Luis Fernando de Souza Freitas<sup>2</sup>

UFMS/CPAR, Paranaíba, MS

Este trabalho teve como objetivo abordar uma aplicação do ajuste de curvas pelo método dos Quadrados Mínimos na projeção populacional do Estado de Mato Grosso do Sul, bem como na quantidade de indivíduos matriculados no Ensino Fundamental do referido estado. Assim, utilizou-se o conjunto de dados da projeção da população de Mato Grosso do Sul no período de 2010 a 2060 [3] e o número de matriculados no Ensino Fundamental de 2009 a 2018 [4], obtidos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), para determinar uma função que melhor os descrevessem.

O método de ajuste de curvas por Quadrados Mínimos [2] [6] considera o conjunto de pares ordenados  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$  em que a função  $f$  é desconhecida, com a intenção de aproximar a função  $f$  nos pontos dados por uma função  $\varphi$ . O mesmo é definido por:  $Q = \text{dist}(f(x), \varphi(x)) = \|f(x) - \varphi(x)\|^2 = \text{mínima}$ . A escolha do método se deu pela facilidade em trabalhar com um grande conjunto de pontos e, além disso, permite extrapolar os dados e fazer previsões, sempre que os dados trabalhados tenham um comportamento similar ao de alguma função conhecida no gráfico de dispersão. De forma arbitrária, foram utilizadas diferentes funções para aproximar a projeção populacional de Mato Grosso do Sul, todas baseadas no comportamento do gráfico de dispersão, dentre elas o modelo de Verhulst ( $\varphi_1$ ) [1] [5], funções que têm um comportamento assintótico com parâmetros não linearizados ( $\varphi_2$ ) e linearizados ( $\varphi_3$ ) e também um polinômio de grau 2 ( $\varphi_p$ ). Já para ajustar a quantidade de matriculados no Ensino Fundamental, dado que o gráfico de dispersão possuía comportamentos oscilatórios, foi utilizado um polinômio de grau 3 ( $\varphi_1$ ), grau 4 ( $\varphi_2$ ) e grau 5 ( $\varphi_3$ ). O conceito de erro utilizado para garantir um bom ajuste foi o MAPE (Mean Absolute Percentage of Error, em Português, Percentual Absoluto Médio de Erro), onde a melhor aproximação se dá pelo menor valor calculado.

No que tange à projeção populacional, entre as funções que obtiveram resultados mais relevantes têm-se  $\varphi_1$  e  $\varphi_p$ . Vimos que a  $\varphi_p(t) = -344,58906(t - 2010)^2 + 36.478,68038(t - 2010) + 2.482.637,76693$  foi a função que apresentou menor erro (0,067654%) entre as quatro  $\varphi$ 's testadas no trabalho. Contudo, mesmo com o menor erro, polinômios não são indicados para a projeção de dados em longo prazo. No trabalho em questão por meio de sua aplicação, tendo como base a  $\varphi_p$ , foi observado que a população de Mato Grosso do Sul chegaria a seu ápice (3.448.058) no ano de 2063 e seria extinta no ano de 2162, algo biologicamente pouco provável. Sendo assim,  $\varphi_1(t) = \frac{P_{max}}{1 + e^{-0,096936(t-2010)}} \left( \frac{P_{max}}{P(2010)} - 1 \right)$  se destacou por ser o modelo com menor erro

(3,5745%) apresentado entre os outros ajustes realizados. Tratando-se da taxa de indivíduos matriculados no Ensino Fundamental do referido Estado, a  $\varphi_3(x) = 12,77731(x - 2009)^5 - 385,05571(x -$

<sup>1</sup>paulo.toro@unesp.br

<sup>2</sup>luiz.freitas@ufms.br

$2009)^4 + 4.196,16381(x - 2009)^3 - 28.699,66354(x - 2009) + 418.194,33007$  foi considerada o melhor ajuste entre os resultados obtidos, por resultar em menor erro (0,12397%) e ser graficamente a que mais se aproxima da função do gráfico de dispersão. Os gráficos que comparam as funções ajustadas encontradas com os pontos de dispersão, bem como as tabelas com os valores dos erros calculados podem ser consultadas em [7].

Ressalta-se que essas análises poderão ser utilizadas para auxiliar órgãos públicos no desenvolvimento de ações governamentais, políticas públicas, bem como programas que possam viabilizar e potencializar a mobilidade urbana e a qualidade de vida.

## Referências

- [1] Bassanezi, R.C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, 4a. edição. Editora Contexto, São Paulo, 2002.
- [2] Franco, N. B. *Cálculo numérico*. Pearson, São Paulo, 2006.
- [3] IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação**. 2019. Local selecionado: Mato Grosso do Sul. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>>. Acesso em: 01 de dez. de 2019.
- [4] IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Cidades e estados**. 2019. Local selecionado: Matrículas no ensino fundamental. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/ms.html>>. Acesso em: 01 de dez. de 2019.
- [5] Krebs, C. J. *Ecology: the experimental analysis of distribution and abundance*. Harper & Row Publishers, New York, 1972.
- [6] Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. da.R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2a edição. Pearson, São Paulo, 1996.
- [7] Toro, P. F. Ajuste de curvas pelo método dos Quadrados Mínimos: Uma aplicação com dados de Mato Grosso do Sul, Trabalho de Conclusão de Curso, Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, Paranaíba, 2019.