Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Parâmetros de Stokes, Códigos Esféricos Ótimos e Fibração de Hopf como Ferramentas para Construção de Modulações em 4D

Danyel Morais Doval [1]
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de São João da Boa Vista, SP
Cintya Wink de Oliveira Benedito [2]
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de São João da Boa Vista, SP

Neste trabalho, iremos apresentar o processo de uma modulação em 4D partindo de uma onda eletromagnética propagante no tempo e relacionando-a com os parâmetros de Stokes. Em seguida, iremos associar os parâmetros de Stokes com códigos esféricos ótimos, [1], para então utilizar a fibração de Hopf para realizar a parametrização da constelação de sinais de uma modulação 4D. Iremos exemplificar este processo apresentando a modulação 8PolSK-8PSK, [3].

Uma onda eletromagnética propagante no sentido positivo de z é caracterizada pelas suas amplitudes E_x e E_y em cada uma de suas componentes nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$ e pela diferença de fase ϕ entre tais componentes. Os parâmetros de Stokes S_0, S_1, S_2, e S_3 são geralmente expressos como um espaço vetorial em $\mathbb{R}^4$. No domínio óptico, tomamos S_0 como a intensidade máxima do sinal e ao considerar $S_0 = 1$, mapeamos todos os pontos da esfera de Poincaré no espaço S^2 variando os parâmetros S_1, S_2 e S_3. De modo a considerar a maior distância possível entre os pontos, iremos utilizar códigos esféricos ótimos para escolher os pontos em S^2 e então associar suas componentes aos parâmetros de Stokes. Na Tabela 1 apresentamos esta relação para o caso de 8 pontos (Figura 1 (a)).

A fibração de Hopf é definida como uma decomposição do espaço geométrico em subespaços denominados fibras de Hopf. Visando a aplicação em modulação 4D, a fibração de Hopf de interesse neste trabalho é $(S^1 \times S^2) \to S^3$, que significa que o espaço S^3 é fibrado por grandes círculos S^1 e um espaço base S^2, [2]. Dessa forma, ao considerar qualquer ponto do espaço base S^2 dado pelos parâmetros de Stokes (S_1, S_2, S_3) obtido a partir de códigos esféricos ótimos, obtém-se um círculo respectivo no espaço S^3 com parâmetros (x_1, x_2, x_3, x_4) que irão representar as coordenadas do vetor 4D. Este procedimento que representa a transformação dos pontos em S^2 de modo a obter os vetores de quatro dimensões a partir dos círculos discretos de Hopf, nos permite realizar a construção e o rotulamento de constelações de sinais para modulações em 4D.

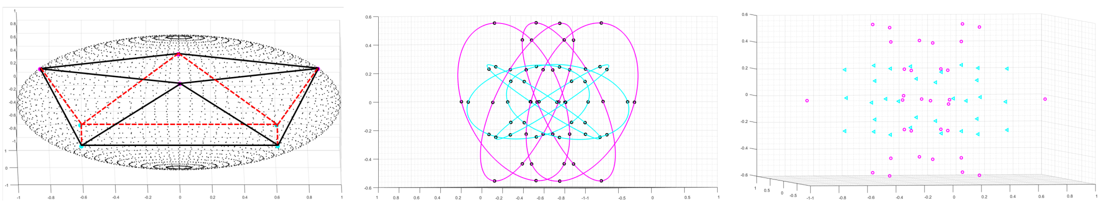
As modulações em 4D serão apresentadas na seguinte forma: $\mathbf{m}$PolSK $-$ $\mathbf{n}$PSK, onde $\mathbf{m}$ é a quantidade de pontos considerados na esfera S^2, $\mathbf{n}$ denota a quantidade de valores

[1] danydoval@hotmail.com
[2] cintya.benedito@unesp.br

Tabela 1: Amplitudes e Diferença de Fase para $M = 8$ pontos ótimos.

Pontos	(S_1, S_2, S_3)	E_x	E_y	ϕ
1°	$(0.6078, 0.6078, -0.5111)$	0.8966	0.4428	40.06°
2°	$(-0.6078, 0.6078, -0.5111)$	0.4428	0.8966	40.06°
3°	$(0.6078, -0.6078, -0.5111)$	0.8966	0.4428	139.94°
4°	$(-0.6078, -0.6078, -0.5111)$	0.4428	0.8966	139.94°
5°	$(0.8595, 0, 0.5111)$	0.9642	0.2649	$-90°$
6°	$(-0.8595, 0, 0.5111)$	0.2649	0.9642	$-90°$
7°	$(0, 0.8595, 0.5111)$	0.7071	0.7071	$-30.73°$
8°	$(0, -0.8595, 0.5111)$	0.7071	0.7071	$-149.27°$

discretos (amostras) dos círculos toroidais no S^3, PolSK é uma modulação por desvio de polarização e PSK é uma modulação por mudança de fase. Esta modulação irá gerar uma constelação de $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ sinais. De forma sintetizada, para construir a modulação 8PolSK-8PSK, inicialmente aplicamos a fibração de Hopf nos 8 pontos ótimos indicados na Tabela 1 obtendo assim 8 círculos toroidais no S^3. Após isto, devemos discretizar os círculos em 8 amostras angulares (PSK) considerando o arranjo $\{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4\}$. Os pontos obtidos a partir da modulação 8PolSK-8PSK formam uma constelação de sinais com 64 pontos como pode ser visto na Figura 1 (b) e (c).



(a) Código esférico ótimo 8pts (b) Modulação 8PolSK-8PSK (c) Constelação de sinais

Figura 1: Modulação 8PolSK-8PSK utilizando códigos esféricos ótimos.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP Processo 2020/03613-7.

Referências

[1] Ericson, T. and Zinoviev, V. *Codes on Euclidean Spheres, volume 63, 1st Edition*, Elsevier, Amsterdam, 2001.

[2] Lyons, D. W. An Elementary Introduction to the Hopf Fibration, *Mathematics Magazine*, volume 76, no. 2, pages 87–98, 2003. DOI: 10.2307/3219300.

[3] Rodrigues, F. A., Temporão, G. and Weid, J. P. Constructive methods for the design and labeling of four-dimensional modulations, *Journal of Communication and Information Systems*, volume 33, no. 1, pages 257-270, 2018. DOI: 10.14209/jcis.2018.26.