Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Códigos geometricamente uniformes sobre anéis quocientes de inteiros Gaussianos

Mariana Gabriela Gusmão[1]
UNIFAL, Alfenas, MG
Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz[2]
ICEx/UNIFAL, Alfenas, MG

A Teoria dos Códigos Corretores de Erros tem como principal objetivo detectar e corrigir possíveis erros de transmissão de uma mensagem, para que assim a mensagem possa chegar ao seu destino conforme foi enviada originalmente. Essa teoria está presente em pesquisas de diversas áreas, como Matemática, Estatística, Computação, Engenharia Elétrica e Biologia.

Os códigos corretores de erros estão presentes de diversas formas no nosso cotidiano, contribuindo principalmente para o desenvolvimento tecnológico e garantindo a confiabilidade dos dados transmitidos digitalmente. Atualmente os códigos corretores de erros são amplamente utilizados em programas espaciais da NASA e do JPL (Jet Propulsion Laboraty), como na missão Galileo para Júpiter, na missão Cassini para Saturno e na missão Marte [3]. Em [4] vemos aplicações da teoria de códigos mais próximas do cotidiano, como os códigos que possuem dígitos de controle presentes no CPF e nos cartões de crédito. Nessa teoria, pode-se ver como a matemática pura, especificamente a álgebra abstrata, se relaciona com problemas aplicados.

O conceito de códigos de grupos para o canal Gaussiano foi introduzido em 1968 por Slepian [6], onde foram apresentadas suas principais propriedades. Os códigos de grupo em $\mathbb{R}^n$ possuem todas as regiões de Voronoi, ou regiões de decisão, congruentes; todas as palavras-código têm a mesma probabilidade de erro e o perfil de distância é sempre o mesmo. Posteriormente, Forney [1] apresentou os códigos geometricamente uniformes, estes apresentam uniformidade geométrica, que além de ser um tipo forte de simetria, permite outras qualidades, como regiões congruentes e grupo gerador isomorfo a um grupo de permutação transitivo.

Neste trabalho exploramos, por meio de um estudo teórico, os códigos geometricamente uniformes, mais especificamente os códigos quase perfeitos, que são uma subclasse dos códigos geometricamente uniformes. Os códigos quase perfeitos, introduzidos em [5], além de preservarem as propriedades dos códigos geometricamente uniformes, são capazes de corrigir mais padrões de erro do que os códigos perfeitos. Um código é dito quase-perfeito se o mesmo é capaz de corrigir todos os padrões com até t erros e alguns padrões com $t+1$ erros, enquanto os perfeitos corrigem apenas erros padrões de até t erros.

De acordo com [5], escolhendo β divisor de α tal que β é da forma $t+(t+1)i$ ou $t-(t+1)i$, obtemos um código perfeito, e a constelação de pontos é coberta por regiões fundamentais constituídas por esferas de Lee de raio t. Assim, códigos perfeitos são obtidos através de translações de esferas de Lee de raio t. Como observado em [2], uma esfera de Lee de raio r em $\mathbb{Z}^2$ possui $2r^2+2r+1$ pontos. Agora, se tomarmos um β divisor de α, que não contenha nenhuma das formas $t+(t+1)i$ ou $t-(t+1)i$, podemos obter um novo código, não mais perfeito, mas que cobre a constelação de pontos por regiões fundamentais idênticas, e mantendo as propriedades de um código geometricamente uniforme. Nesta busca, [5] chegou ao seguinte procedimento.

[1]marye_mb2011@hotmail.com
[2]catia.quilles@gmail.com

Theorem 0.1. *Seja $0 \neq \alpha$, tal que $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ e t é um inteiro positivo, temos que:*

- *Se $\beta = (t-c) + (t + (c+1))i$ divide α, então o ideal $S = (\beta) \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ é um código quase-perfeito e corrige padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões de t + 1 erros em G_α (grafo gerado por α);*
- *$\bar{\beta} = (t-c) - (t+(c+1))i$ divide α, então o ideal $S = (\bar{\beta}) \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ é um código quase-perfeito que corrige padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões de t + 1 erros em G_α (grafo gerado por α).*

Quando c = 0 na definição acima, obtemos um código perfeito. Assim, um código perfeito é um caso particular dos códigos quase perfeitos.

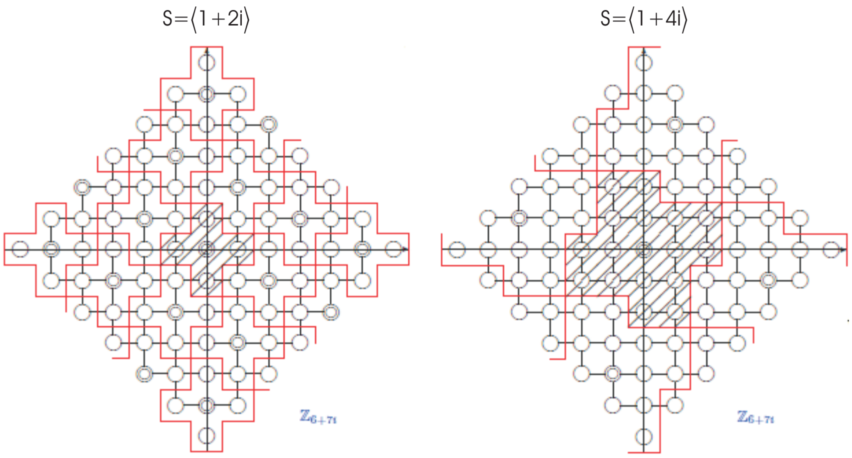

Figura 1: Códigos perfeito e quase-perfeito em $\mathbb{Z}_{6+7i}$, respectivamente.

Referências

[1] Forney, G. D. Geometrically Uniform Codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, 37:1241-1260, 1991. DOI: 10.1109/18.133243

[2] Golomb, S.W.; Welch, L.R. Perfect codes in the lee Metric and the packing of the polyominoes, *SIAM J. Applied Mathematics*, 18:302-317, 1970.

[3] Milies, C. P. Breve introdução á Teoria dos Códigos Corretores de Erros. In *Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste*. SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[4] Nogueira, J. A. P. Aplicações Matemáticas em Códigos Corretores de Erros, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Cariri, 2019.

[5] Quilles, C.; Palazzo Jr, R. Quasi-perfect geometrically uniform codes derived from graphs over Gaussian integer rings, *2010 IEEE International Symposium on Information Theory*, 2010. DOI: 10.1109 / ISIT.2010.5513673

[6] Slepian, D. Group Codes for the Gaussian Channel, *Bell System Technical Journal*, 47:575-602, 1968. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1968.tb02486.x.

