Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário e as Equações de Painlevé

Karina Seviero Rampazzi[1]
Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Cleonice Fátima Bracciali[2]
Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP

As equações diferenciais de Painlevé são equações diferenciais não lineares de segunda ordem que não possuem pontos críticos móveis, isto é, se todas as suas singularidades móveis são polos. Essa propriedade ficou conhecida como Propriedade de Painlevé. O estudo dessas equações surgiu no fim do século XIX, quando Painlevé, Fuchs, Picard e Poincaré, ficaram interessados em encontrar equações diferenciais ordinárias que satisfizessem tal propriedade.

No início do século XX, Painlevé descobriu que existem 50 equações diferenciais na forma canônica que satisfaziam tal propriedade. Dessas 50, existem apenas 6 que não podiam ser reduzidas a equações lineares cujas soluções já são conhecidas. Essas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé. A quinta delas é:

$$\mathrm{P_V}: \qquad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 + \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},$$

onde α, β, γ e δ são constantes.

As equações discretas de Painlevé apareceram mais recentemente. Elas são equações discretas não lineares (relações de recorrência) para qual o limite contínuo é uma das equações diferenciais de Painlevé. Neste trabalho consideramos apenas a segunda equação discreta de Painlevé, dada por

$$\mathrm{dP_{II}}: \quad x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n(\alpha n + \beta) + a}{1 - x_n^2},$$

onde a, α e β são constantes.

Uma sequência de polinômios $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ é ortonormal sobre o círculo unitário com respeito a função peso w em $\theta \in (0, 2\pi)$ e $z = e^{i\theta}$, se

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}w(\theta)d\theta = \delta_{n,m},$$

onde $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker.

Esses polinômios são denotados por

$$\varphi_n(z) = k_n z^n + \cdots, \quad k_n > 0.$$

[1]karina.rampazzi@unesp.br
[2]cleonice.bracciali@unesp.br

 © 2021 SBMAC

Os polinômios ortogonais mônicos são definidos por $\Phi_n(z) = \dfrac{\varphi_n(z)}{k_n}$. Logo, a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$, onde Φ_n é de grau exatamente n, com relação a função peso w, satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ k_n^{-2}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Os polinômios Φ_n satisfazem uma propriedade importante conhecida como recorrência de Szegő

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) + \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z),$$

onde $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}_n(1/z)$ é o polinômio recíproco e os coeficientes α_n, dados por $\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, são chamados de coeficientes de Verblunsky. Para mais detalhes sobre os polinômios ortogonais no círculo unitário, ver Simon [1].

Considere a seguinte função peso

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{tcos(\theta)}, \quad \theta \in (0, 2\pi),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Logo, a recorrência de Szegő associada a função peso w tem o parâmetro t além da variável z, ou seja, os coeficientes de Verblunsky dependem de t.

Neste trabalho estudamos a relação entre as equações (diferenciais e discretas) de Painlevé e os polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a função peso w. Discutimos os resultados apresentados em [2], como uma equação não linear satisfeita pelos coeficientes de Verblunsky, tal equação é a segunda equação discreta de Painlevé com $x_n = \alpha_n(t)$, $\alpha = \beta = -2/t$ e $a = 0$, ou seja,

$$\alpha_{n+1}(t) + \alpha_{n-1}(t) = \frac{-2\alpha_n(t)(n+1)}{t(1-\alpha_n^2(t))}.$$

Além disso, esses coeficientes satisfazem uma equação diferencial, conhecida como equação de Ablowitz-Ladik. Essa equação é importante para a obtenção de uma relação entre esses polinômios e as equações diferenciais de Painlevé, isto é, com a quinta equação diferencial de Painlevé, onde $x = -t$, $\alpha = -\beta = (n+1)^2/8$, $\gamma = 0$ e $\delta = -2$, ou seja,

$$y''(t) = \left(\frac{1}{2y(t)} + \frac{1}{y(t)-1}\right)(y'(t))^2 - \frac{y'(t)}{t} + \frac{(n+1)^2}{8t^2}(y(t)-1)^2\left(y(t) - \frac{1}{y(t)}\right) - \frac{2y(t)(y(t)+1)}{y(t)-1}.$$

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part I: Classical Theory.* American Mathematical Society, Providence, 2005.

[2] Van Assche, W. *Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations.* Cambridge University Press, Belgium, 2017.

 © 2021 SBMAC