

Heurísticas baseadas em modelos matemáticos para o problema da pseudoarborescência orientada a lucro

Enzo Falchi Gaban¹
 Edna Ayako Hoshino²
 Jean Patrick Tremeschin Torres³
 FACOM/UFMS, Campo Grande, MS

O problema da pseudoarborescência orientada a lucro (PRAP), introduzido por Hill, Baldacci e Hoshino [3] é definido em um grafo orientado $G = (V, A)$, no qual $V = W \cup U \cup \{d\}$, W é um conjunto de vértices de Steiner, $U = U_1 \cup U_2$ é um conjunto de clientes, em que U_1 e U_2 são conjuntos de clientes de tipo 1 e 2, respectivamente, e d representa o vértice central (ou depósito). Para todo vértice $i \in V$ há um lucro não negativo associado p_i e assumimos que $p_i = 0, \forall i \in W \cup \{d\}$. A cada arco $(i, j) \in A$ há um custo c_{ij} associado. Uma pseudoarborescência consiste em um grafo dirigido contendo um único ciclo C , chamado de ciclo fundamental, passando pelo depósito d e pelas raízes de árvores T_1, T_2, \dots, T_k , sendo que clientes de tipo 2 devem estar inseridos em C . O custo de uma pseudoarborescência é dado pela soma dos custos de seus arcos. O objetivo do PRAP é encontrar um conjunto de, no máximo, m pseudoarborescências, que minimiza a diferença entre a soma dos custos das pseudoarborescências e a soma dos lucros dos vértices visitados.

Em [3] é apresentado um modelo compacto para o PRAP e proposto um algoritmo exato *branch-and-cut* enquanto um algoritmo *branch-and-price* e um modelo estendido são propostos em [4]. Nesse modelo estendido, há um número exponencial de colunas, cada uma delas associada a uma possível pseudoarborescência de G . A relaxação linear desse modelo é resolvida pelo método de geração de colunas, cujo problema de *pricing* consiste em encontrar uma pseudoarborescência de custo reduzido negativo. O objetivo deste trabalho é propor uma *matheurística* para resolver esse problema de *pricing* para melhorar o desempenho do algoritmo *branch-and-price*.

Em [1], Archetti define *matheurísticas* como heurísticas que incorporam modelos matemáticos e faz um levantamento sobre *matheurísticas* usadas para problemas de roteamento de veículos dividindo-as em três classes: abordagens de decomposição, heurísticas de refinamento e abordagens de *branch-and-price* ou geração de colunas. A *matheurística* proposta pode ser classificada como uma *matheurística* de refinamento segundo [1] e gera uma pseudoarborescência a partir de soluções geradas por outra heurística qualquer. Inicialmente é feita uma classificação dos vértices, dividindo-os em subconjuntos B , R e D , representando respectivamente os conjuntos de vértices bons, duvidosos e ruins, de acordo com a frequência em que aparecem nas soluções. Em seguida, uma versão modificada do algoritmo de Kruskal [5] é usada para gerar uma floresta de vértices em D , ordenando os arcos de acordo com os custos reduzidos e tentando realizar inserções enquanto o custo reduzido não for positivo. Para juntar duas árvores, é executada uma verificação para garantir que clientes do tipo 2 serão inseridos apenas em caminhos e que a árvore não excederá o limite de $Q - |B|$ clientes. Para concluir, uma formulação por programação linear inteira (PLI) é usada para modelar o problema de encontrar a pseudoarborescência de menor custo reduzido que

¹enzo.gaban@ufms.br

²eah@facom.ufms.br

³jeantremeschin@facom.ufms.br

contém todos os vértices bons e algumas das árvores de vértices duvidosos construídas na etapa anterior. Um resolvidor de PLI é usado para obter a solução ótima do problema modelado.

O modelo utiliza um grafo orientado $G' = (V', E')$, ao qual vértices bons de G e as árvores de vértices duvidosos são inclusos como vértices. Caso a árvore adicionada a G' seja um caminho com extremidades u e v , apenas arcos que chegam em u e saem de v são incluídos. Caso contrário, apenas os arcos incidentes na raiz da árvore são incluídos em G' . A demanda q_i corresponde ao total de clientes representados no vértice i , enquanto o custo reduzido c'_{uv} de um arco (u, v) consiste na soma do custo reduzido do arco correspondente em G mais o custo reduzido da árvore representada por u . A variável x_e é tal que $x_e = 1$ se o arco $e \in E'$ é escolhido para estar no ciclo. O modelo proposto é descrito a seguir.

$$\min \sum_{e \in E'} c'_e x_e \tag{1}$$

$$\sum_{e \in \delta^-(i)} x_e = y_i, \forall i \in V' \tag{2}$$

$$\sum_{e \in \delta^+(i)} x_e = y_i, \forall i \in V' \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V'} q_i y_i \leq Q \tag{4}$$

$$|V'| x_{ab} + u_a - u_b \leq |V'| - 1, \forall (a, b) \in E' : a, b \neq d \tag{5}$$

$$1 \leq u_a \leq |V'|, \forall a \in V \setminus \{d\} \tag{6}$$

$$y \in \mathbb{B}^{|V'|}, x \in \mathbb{B}^{|E'|} \tag{7}$$

As restrições (2) e (3) garantem a formação de ciclos enquanto (5) e (6) evitam subciclos. A restrição (4) proíbe que o total de clientes ultrapasse o limite Q e (7) são restrições de integralidade.

Este é um trabalho de PIBIC em andamento, com resultados computacionais ainda não obtidos. Os algoritmos de classificação dos vértices e geração da floresta já foram implementados usando a linguagem C++ e o framework SCIP [2], sob licença acadêmica, usando uma meta-heurística GRASP proposta por [6] para gerar as soluções iniciais. As próximas etapas consistem na implementação do modelo proposto e na avaliação da qualidade e do desempenho da matheurística.

Referências

- [1] Archetti, C. and Speranza, M. G. A survey on matheuristics for routing problems. *EURO Journal on Computational Optimization*, v. 2, n. 4, p. 223-246, 2014.
- [2] Gamrath, G. et al. *The SCIP Optimization Suite 3.2*. [S.l.], 2016. Disponível em: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2016/03/5360.html.
- [3] Hill, A., Baldacci, R. and Hoshino, E. A. Capacitated ring arborescence problems with profits. *OR Spectrum*, v. 41, n. 2, p. 357-389, 2019.
- [4] Hoshino, E., Hill, A., Baldacci, R. A branch-and-price approach for ring arborescence problems with profits (unpublished).
- [5] Kruskal, J.B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical society*, JSTOR, v. 7, n. 1, p. 48-50, 1956.
- [6] Sanches, G. C. Heurísticas para o problema da pseudoarborescência orientada a lucro, Relatório Final de PIVIC 2018/19, UFMS, 2019.