

Proposta Alternativa de quadratura de Gauss 3D

Renan C. da Silva¹

Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES

Kaio de O. Santos²

Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES

Werley G. Facco³

Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

Alex S. Moura⁴

Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

1 Introdução

Certas funções de várias variáveis exigem o uso de quadraturas de Gauss de alta ordem para o cálculo de suas integrais. O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta eficiente de escolha dos nós de Gauss em domínios tridimensionais (3D).

2 Formulação

Em [1] é apresentado uma proposta de distribuição de nós e pesos de Gauss, de forma tradicional, utilizando mapeamentos entre o cubo e o tetraedro de referência, $R_e = \{(\xi, \eta, \zeta) : -1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1\}$ e $T_e = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z, x+y+z \leq 1\}$, respectivamente. Neste trabalho, o número n de nós de Gauss em T_e é definido pela equação $n = n_1 n_2 n_3 + r$, onde $n_1 = n_2 = n_3 = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ e $r = n - \lfloor n_1 n_2 n_3 \rfloor$. Para cada $l = 1, 2, 3$, obtém-se através da quadratura gaussiana de ordem n_l para o intervalo $[-1, 1]$ nas coordenadas ξ, η, ζ de R_e os nós e pesos de Gauss. Em seguida, caso $r = 0$, os nós de Gauss (ξ_i, η_j, ζ_k) de R_e , $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$ e $k = 1, \dots, n_3$ são mapeados para T_e . Caso contrário, quando $r \neq 0$ novos nós de Gauss serão escolhidos em R_e e mapeados para T_e . Para distribuir os r novos nós de Gauss de R_e em T_e , neste trabalho será adotado o seguinte procedimento: Considere a quantidade de nós n_1 definidos no eixo ξ e adiciona-se um a uma a quantidade $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ de nós sobre as retas $\xi = \xi_l$ e $-1 \leq \eta \leq 1$, para $l = 1, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$. Em seguida adiciona-se um a um os nós de Gauss sobre as retas que passam em (ξ_t, η_t) com $-1 \leq \zeta \leq 1$, para $t = 1, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$. Para evitar a concentração dos nós de Gauss causada pelo mapeamento tradicional, desenvolveu-se uma proposta alternativa. Considerou-se para cada ξ_i a área A_i do triângulo T_i , definido a partir do mapeamento do quadrilátero Q_i de R_e em T_e , Fig. 1 e defina-se o número de nós de Gauss a serem gerados em Q_i e mapeados para T_i por $m_i = \lfloor n_2 n_3 \frac{A_i}{A} \rfloor$, onde $A = \max(A_i)$. Caso seja necessário adiciona-se um a um os $r + (n_2 n_3 - \sum_{i=1}^{n_1} \lfloor n_2 n_3 \frac{A_i}{A} \rfloor)$ nos planos $\eta\zeta$ associado a ξ_i .

¹rcoswoskdasilva@gmail.com

²kaiofabio.98@gmail.com

³werleyfacco@ifes.edu.br

⁴alexsmoura100@gmail.com

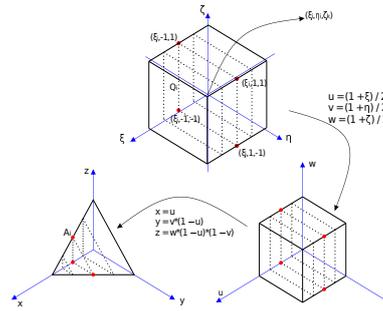


Figura 1: Sucessivas mudanças de variáveis para o tetraedro de referência.

3 Resultados e Discussão

Para verificar a eficiência da proposta apresentada neste trabalho, optou-se por calcular numericamente a integral da função $f(x, y, z) = (x + 2xy - z^3)[exp(20(x * cos 45 + y * sin 45 + z))]$ e comparar com o resultado analítico. Fig. 2 mostra o efeito do número de nós na precisão do resultado. Para a proposta alternativa obtém-se resultados satisfatórios a partir de 140 nós e a partir de 352 para o método tradicional. O que representa um redução de 151% do número de nós.

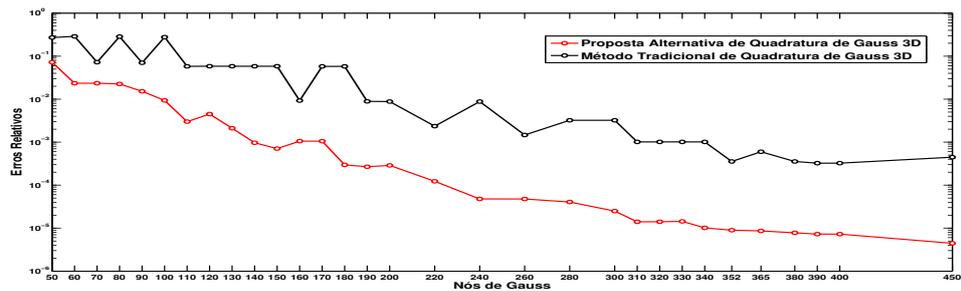


Figura 2: Erro relativo no cálculo da integral de $f(x, y, z)$.

4 Conclusão

A proposta apresentada permitiu encontrar nós de Gauss melhores distribuídos em relação ao método tradicional em T_e e melhorar os resultados na aproximação.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

[1] H. T. Rathod, B. Venkatesudu, K. V. Nagaraja, S. Islam. Md. Gauss Legendre–Gauss Jacobi quadrature rules over a tetrahedral region. Applied Mathematics and Computation, 186-194, 2007. DOI 10.1016/j.amc.2007.01.014.