

Identificando o número de onda em eixos periódicos via Prony

Luiz Henrique M. S. Ribeiro¹

Unicamp, Campinas, SP

Vinícius F. Dal Poggetto²

Unicamp, Campinas, SP

José Roberto F. Arruda³

Unicamp, Campinas, SP

Eixos são guias de ondas torcionais mecânicas essenciais em máquinas [2]. O Objetivo desse trabalho é simular a estimativa do número de ondas de eixos via Prony utilizando o modelo de eixos de Saint-Venant [1]. Aplicando-se o princípio de Hamilton, sua equação do movimento é obtida [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GK_s \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

onde G é o módulo de torção, K_s é a constante de cisalhamento, ρ é a densidade de massa, J é o momento polar de inercia e θ é o deslocamento angular em um dado ponto [2].

A solução analítica do diagrama de dispersão pode ser obtida utilizando o método do elemento espectral [3] e o teorema de Bloch-Floquet [4]. O elemento espectral necessita de menor custo computacional do que a obtida por elementos finitos [5]. A solução por ondas do eixo é [3]:

$$\theta(x, \omega) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{ikx} + A_3 e^{-kx} + A_4 e^{kx}, \quad (2)$$

onde A_n são as n amplitudes da onda, i é o número imaginário, k é o número de onda, e x é a posição onde a resposta é medida/simulada na viga. As transformações podem ser feitas: $V_j^n = e^{(\nu_j \Delta x)n}$, $\nu_{1,2} = \pm ik$ e $\nu_{3,4} = \pm k$ na Eq. (2). A solução da Eq. (2) pode ser escrita para 5 posições espaçadas pelo comprimento de célula unitária (x_n). Cada solução é multiplicadas por uma constante η_n . Todas as soluções são somadas e subtrai-se a primeira solução de ambos os lados da igualdade. Somando-se todos os termos exponenciais e todas as equações, obtém-se [5]:

$$-\sum_{n=0}^4 \eta_n \theta(x_n, \omega) = \sum_{j=1}^4 \left[A_j \sum_{n=0}^4 (\eta_n V_j^n) \right], \quad (3)$$

Assumindo-se a solução nula: $\sum_{n=0}^4 \eta_n V_j^n = \sum_{n=0}^4 \eta_n \theta(x_n, \omega) = 0$, sem perda de generalidade, assume-se $\eta_0 = 1$ e obtém-se:

$$\left\{ \theta(x_1, \omega) \quad \theta(x_2, \omega) \quad \theta(x_3, \omega) \quad \theta(x_4, \omega) \right\} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{Bmatrix} = -\theta(x_0, \omega), \quad \text{ou, } \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\eta} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4)$$

Para mais de 5 observações, pode-se estimar $\boldsymbol{\eta}$ por mínimos quadrados [5]. Para elementos periódicos, o k estimado é um número de onda equivalente, e a periodicidade, dada pelo tamanho

¹luiz.marra@outlook.com.

²vdalpoggetto@gmail.com

³arruda@fem.unicamp.br

da célula (L_{cell}), deve ser respeitada: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = \Delta x$. Depois de estimado η , pode-se definir V_j como as raízes do polinômio $\sum_{n=0}^4 \eta_n V_j^n = 0$, e o k pela relação $V = e^{-ik\Delta x}$.

A Figura 1 apresenta um eixo (a) composto por 10 células (b) e de onde foram obtidas as 9 FRFs, e a Figura 2 representa a solução analítica e a estimação do seu número de onda.

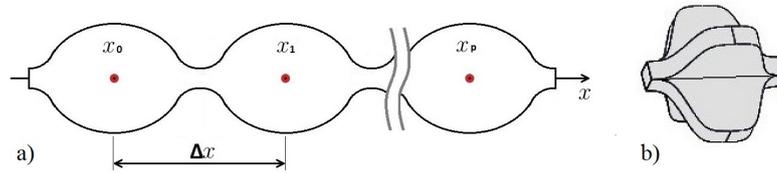


Figura 1: Eixo e locais de observação das FRFs (a) composto por dez células (b).

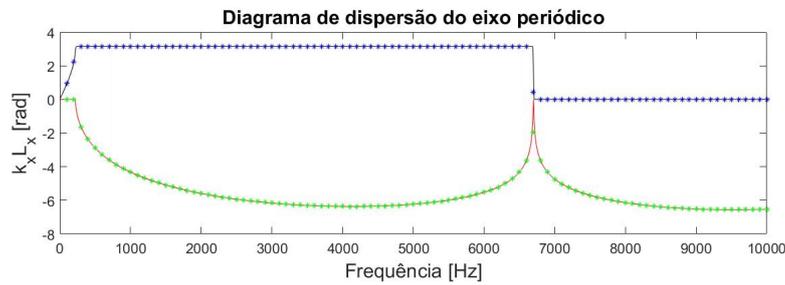


Figura 2: Número de onda do eixo proposto. - solução analítica (parte real: preto, parte imaginária: vermelho), * estimado pelo método de Prony (parte real: azul, parte imaginária: verde).

Pode-se concluir que o método de Prony identifica o número de onda analítico do eixo periódico.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP, processos 2019/00315-8 e 2018/15894-0.

Referências

- [1] Teimoori, Hossein., R. T. Faal, and R. Das. Saint-Venant torsion analysis of bars with rectangular cross-section and effective coating layers, *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016. DOI: 0.1007/s10483-016-2028-8.
- [2] Rao, Singiresu S. *Vibration of continuous systems*. Wiley Online Library, Hoboken, 2019.
- [3] Ribeiro, Luiz H. M. S., et al. Investigating the influence of mechanical property variability on dispersion diagrams using bayesian inference. *International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*. Springer, Cham, 2020.
- [4] Ribeiro, Luiz, et al. A two-dimensional lattice with band gaps robust to mechanical variability. *ISMA 2020 Conference on Noise and Vibration Engineering*. Leuven, Belgium. Vol. 16. 2020.
- [5] Arruda, José R. F., Campos, João P. R., e Piva, José I. Experimental determination of flexural power flow in beams using a modified prony method, *Journal of Sound and Vibration*, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0534>.