Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência de Soluções Periódicas para Equações de Lienard

Murilo de Souza Penteado[1]
Pedro Toniol Cardin[2]
Univerisade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira/SP

1 Introdução

Em 1881, o matemático francês Henry Poincaré, por meio do artigo "Sur les curbes définies par une équation différentielle", deu início a uma área da Matemática conhecida como *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias.* Essa teoria tem como objetivo um entendimento das leis gerais do comportamento das soluções de uma EDO sem necessariamente conhecê-las de forma explícita. Dentre um dos assuntos estudados está o conceito de *ciclo limite*, que nada mais é do que uma *órbita periódica isolada* no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema. Questões como a existência ou não dessas órbitas, estabilidade, unicidade, posição relativa, entre outras propriedades foram e continuam sendo estudadas extensivamente.

Na década de 1920, ao estudarem oscilações não-lineares de fenômenos elétricos, Andronov, Lienard e van der Pol obtiveram um grupo de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que apresentavam os ciclos limites idealizados por Poincaré. Tais equações ficaram conhecidas como *equações de Lienard* e são da forma

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0.$$

Neste trabalho iremos considerar o caso em que $f(x, \dot{x}) = f(x)$, ou seja, vamos considerar equações diferenciais de segunda ordem da forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

ou o sistema planar equivalente dado por

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x), \tag{2}$$

que é obtido após fazermos a chamada *mudança de Lienard*, a qual é dada por $y = \dot{x} + F(x)$, onde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$.

Entender o comportamento local e global das soluções de um sistema de EDOs, sem necessariamente conhecer as soluções explicitamente, é o foco da Teoria Qualitativa. Se conhecemos os pontos críticos do sistema, a estrutura topológica próxima a eles e, além disso, o número de órbitas periódicas, suas estabilidades e respectivas posições relativas, então já é possível termos um bom entendimento do comportamento qualitativo global do sistema. Tendo isso em mente, o presente trabalho tem como objetivo apresentar um resultado que permite determinar a existência de órbitas periódicas para a equação (1), conhecido como *Teorema de Dragilëv*, o qual foi obtido por Dragilëv em [1].

Sob certas condições para as funções $F(x)$ e $g(x)$ no sistema (2), veremos que o Teorema de Dragilëv garante a existência de pelo menos uma órbita periódica para o sistema (2).

[1]murilos_penteado@hotmail.com
[2]pedro.cardin@unesp.br

A justificativa do Teorema de Dragilëv usa um procedimento que consiste na construção de uma região anular no plano de fase de modo que, sobre a fronteira dessa região, o campo de vetores sempre aponta do exterior para o interior (ou sempre aponta do interior para o exterior) quando t cresce. Após a construção de uma região anular usando esse procedimento, a ideia central é a aplicação do conhecido *Teorema de Poincaré-Bendixson*, que é um resultado clássico dentro da Teoria Qualitativa que pode ser usado para estabelecer a existência de ciclos limites para sistemas diferenciais planares.

2 Teorema de Dragilëv

Mais especificamente, o Teorema de Dragilëv possui o seguinte enunciado.

Teorema 2.1 (Dragilëv)**.** *Considere a equação* (1) *ou o sistema equivalente* (2)*. Assumimos que:*

a) $F(x)$ *e* $g(x)$ *satisfazem a condição de Lipschitz para* $|x| < A$*, com* A *suficientemente grande;*

b) $xg(x) > 0$ *quando* $x \neq 0$*,* $G(\pm\infty) = +\infty$*, onde* $G(x) = \int_0^x g(s)ds$*;*

c) $F(x) < 0$ *para* $0 < x < x_1$*,* $F(x) > 0$ *para* $x_2 < x < 0$*;*

d) Existem $M > max(x_1, |x_2|)$ *e* $k_2 < k_1$ *tais que* $F(x) \geq k_1$ *para* $x > M$*, e* $F(x) \leq k_2$ *para* $x < M$*.*

Então, nessas condições, o sistema (2) *tem pelo menos uma órbita periódica.*

Neste trabalho o nosso objetivo é explorar o Teorema de Dragilëv e a sua justificativa, a qual usa o procedimento descrito anteriormente sobre a construção de uma região anular no espaço de fase satisfazendo certas propriedades.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP pelo apoio financeiro (Número do Processo: 2018/26674-1).

Referências

[1] Dragilev, A.V. *Periodic solutions of the differential equation of nonlinear oscillations*, Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh. 16, 85-88, 1952.

[2] Zhang, Z. F., Ding, T. R., Huang, W. Z. and Dong, Z. X. *Qualitative theory of differential equations, volume 101 of Translations of Mathematical Monographs.* American Society, Providence, RI, 1992.