Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Zeros de Polinômios Quase-ortogonais de Ordem 1

Maycon C. Calixto Assis[1]
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, UNESP, Presidente Prudente, SP
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

Os polinômios ortogonais possuem diversas aplicações em inúmeros campos da matemática aplicada e são dotados de várias propriedades como, por exemplo, zeros reais, distintos e entrelaçados. E, como consequência dos polinômios ortogonais, surgem os polinômios quase-ortogonais, que apresentam propriedades similares e características próprias.

Mostraremos a seguir definições de suma importância para o desenvolvimento desse estudo.

Definição 1.1. *Seja R_n um polinômio de grau exatamente n. Se R_n satisfaz as condições*

$$\int_a^b t^k R_n(t)\omega(t)dt = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, n-1-r,$$

onde ω é uma função peso positiva em $[a, b]$, então R_n é dito quase-ortogonal de ordem r em $[a, b]$ com respeito a ω.

Uma outra forma de se representar tais polinômios é apresentada no seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja $\{P_n\}$ uma família de polinômios ortogonais em $[a, b]$ com respeito a uma função peso positiva ω. O polinômio obtido pela seguinte combinação linear*

$$R_n = P_n(t) + c_1 P_{n-1}(t) + \cdots + c_r P_{n-r}(t),$$

onde c_i, com $i = 1, \dots, r$, são números que podem depender de n e $c_r \neq 0$, é quase-ortogonal de ordem r em $[a, b]$ com respeito a ω.

Este trabalho consiste em apresentar condições necessárias e suficientes para a localização dos zeros de polinômios quase-ortogonais de ordem 1.

2 Resultados Principais

Enunciaremos a seguir propriedades dos zeros de polinômios quase-ortogonais que, em conjunto com as definições apresentadas anteriormente, torna possível sua localização.

O resultado a seguir pode ser visto em [2].

Teorema 2.1. *Se R_n é um polinômio quase-ortogonal de ordem r em $[a, b]$ com respeito a função peso positiva ω, então pelo menos $(n - r)$ zeros distintos de R_n estão no intervalo (a, b).*

[1]mayconcalixto@hotmail.com
[2]vanessa.botta@unesp.br

Seja $\{P_n\}$ a família de polinômios ortogonais em $[a, b]$, com relação a função peso positiva ω, onde os zeros de $P_n(t)$ são representados por $t_{i,n}$, $i = 1, \ldots, n$, e consideremos $f_n(t) = P_n(t)/P_{n-1}(t)$. Observemos que os zeros de $P_{n-1}(t)$ são dados por $t_{j,n-1}$, sendo $j = 1, \ldots, n-1$.

Consideremos então o seguinte polinômio, $R_n = P_n + a_n P_{n-1}$, com $a_n \neq 0$. Temos, pelo Teorema 1.1, que R_n é um polinômio quase-ortogonal de ordem 1. Seus zeros satisfazem a seguinte propriedade.

Teorema 2.2.

(i) *Os zeros* $y_1 < \cdots < y_n$ *de* R_n *são reais e distintos e no máximo um deles encontra-se no exterior de* (a, b).

(ii) (a) *Se* $-a_n > 0$*, então* $t_{i,n} < y_i < t_{i,n-1}$ *para* $i = 1, \ldots, n-1$ *e* $t_{n,n} < y_n$.
(b) *Se* $-a_n < 0$*, então* $y_1 < t_{1,n}$ *e* $t_{i-1,n-1} < y_i < t_{i,n}$ *para* $i = 2, \ldots, n$.

(iii) *Se* $-a_n < f_n(a) < 0$*, então* $y_1 < a$.

(iv) *Se* $-a_n > f_n(b) > 0$*, então* $b < y_n$.

(v) *Se* $f_n(a) < -a_n < f_n(b)$*,* R_n *tem todos os zeros em* (a, b).

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [1].

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2017/10143-4).

Referências

[1] Brezinski, C., Driver, K. A. and Redivo-Zaglia, M. *Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials.* Applied Numerical Mathematics, volume 48, 2004. DOI: 10.1016/j.apnum.2003.10.001.

[2] Shohat, J. A. *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients.* Trans. Am. Math. Soc., 42 (1937) 461-496.