Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Método de Segunda Ordem Fraca para Equações Diferenciais Estocásticas com Saltos Markovianos

Lucas E. Mieri [1]
Saul.C. Leite[2]
CMCC/UFABC, Santo André, SP

Soluções de Equações Diferenciais Estocásticas Hibridas (EDEH) são muito empregadas para modelar sistemas compostos por duas partes, uma tomando valores que variam de forma contínua e outra tomando valores em um conjunto discreto. Tais modelos são aplicados em finanças, pesquisa operacional, dinâmica populacional, dentre diversos outros. Devido a complexidade proveniente da parte discreta em conjunto com a não-linearidade dos termos envolvidos na parte contínua, é muito difícil obter soluções fechadas para essas equações. Muitas vezes, a única abordagem disponível é através de simulações computacionais. Diferentemente de modelos para sistemas determinísticos, como soluções para equações diferenciais ordinárias, que são dadas por funções, as soluções para as Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) (incluindo as Híbridas tratadas aqui) são processos estocásticos, e portanto somente são descritos exatamente através de sua distribuição. Os métodos numéricos para estas equações diferenciais estocásticas são usados para simular uma possível trajetória da solução e a distribuição destas trajetórias ou propriedades das mesmas, podem ser inferidas através de repetição em um processo de Monte Carlo.

Quando um método numérico é proposto, espera-se que ele possua um comportamento de convergência em relação a solução original do sistema. Contudo, é também necessário entender com que taxa tal aproximação converge para a solução. Em se tratando de métodos numéricos para EDEs, existem duas noções mais usuais de ordem de convergência. Suponha que $\{\tilde{X}_n\}_{n\geq 0}$ é um processo estocástico representando os possíveis caminhos gerados por um método numérico de interesse e seja $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ a solução da EDE. Dado $T > 0$, diz-se que o método associado a $\{\tilde{X}_n\}_{n\geq 0}$ possui *ordem de convergência fraca* γ se

$$\left|\mathbb{E}[f(\tilde{X}_n)] - \mathbb{E}[f(X(nh))]\right| \leq Ch^{\gamma}, \tag{1}$$

para todo n satisfazendo $nh \in [0, T]$, h suficientemente pequeno e f em uma certa classe de funções (esta classe geralmente inclui funções que se comportam como polinômios em regiões limitadas). Por outro lado, diz-se que o método possui *ordem forte de convergência* γ se existe uma constante $C > 0$ tal que: $\mathbb{E}\left[|\tilde{X}_n - X(nh)|\right] \leq Ch^{\gamma}$ para todo n satisfazendo $nh \in [0, T]$ e h suficientemente pequeno [2]. Neste trabalho, estamos interessados na ordem de convergência fraca para os métodos.

Atualmente, existem diferentes métodos numéricos para fazer tais simulações para soluções de EDEH. Por exemplo, alguns autores adaptaram o método de Euler-Maruyama, como em [4–6]. Estes métodos diferem na forma de simulação da parte discreta, alguns a consideram independente do processo contínuo e são modeladas como cadeias de Markov (neste caso EDEH são conhecidas como Equações Diferenciais Estocásticas com Saltos Markovianos (EDESM)) e outros consideram que o processo discreto depende (através de suas taxas de transição) da parte contínua. Apesar destes trabalhos não apresentarem ordem de convergência fraca dos métodos propostos, é sabido que o método de Euler-Maruyama para EDEs possui ordem de convergência fraca 1.

[1]lucas.mieri@aluno.ufabc.edu.br
[2]saul.leite@ufabc.edu.br

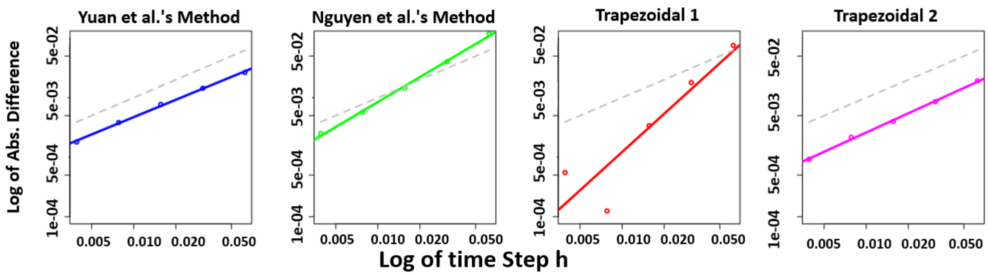

Figura 1: O gráfico do passo h contra o erro (calculado contra a solução exata para a média) em escala log. A reta de regressão para o método proposto em [6] aparece com inclinação 0.9677, o método proposto em [3] tem inclinação 1.394, e os métodos trapezoidais considerados aqui possuem inclinação 2.136 e 1.073. A linha cinza de referência tem inclinação 1.

Em [3] foi proposto uma variação do método de Milstein para EDESM, os autores provaram que o método proposto converge com ordem de convergência forte 1. Em relação a convergência fraca, sabe-se que este método possui ordem de convergencia fraca 1 para EDEs, mas não existe resultado que inclua as EDESMs. Uma desvantagem do método de Milstein é que ele depende de derivadas parciais do coeficiente de deriva e se torna complexo para casos multidimensionais. Neste trabalho, é proposto a adaptação do método trapezoidal proposto em [1] para EDESM. Este método não depende de informação sobre derivadas dos termos e estende facilmente para o caso multidimensional (desde que a matriz de difusão possa ser fatorada de uma forma específica, veja a referência para detalhes) e possui ordem de convergência fraca 2.

Pra ilustrar a convergência do método, foi considerado o modelo conhecido como movimento Browniano geométrico com saltos Markovianos (usado para modelar preços de ações em [7]) e a função identidade $f(x) = x$ em (1). Foram testados os métodos propostos em [6] e [3] contra duas propostas diferentes de adaptação do método trapezoidal para EDESMs (usando formas distintas para a simulação da parte discreta). Os métodos foram discretizados em passos de tamanho $h = 2^k$, para $k \in \{4, \dots, 9\}$ e simulados $2 \cdot 10^7$ vezes. Os resultados são ilustrados pela Figura 1. Note que somente a primeira proposta para o método trapezoidal consegue atingir ordem de convergência fraca 2.

Referências

[1] Anderson, D. F., and Mattingly, J. C. A weak trapezoidal method for a class of stochastic differential equations. *Communications in Mathematical Sciences 9*, 1 (2011), 301–318.

[2] Higham., D. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review 43*, 3 (2001), 525–546.

[3] Nguyen, S., Hoang, T., Nguyen, D., and Yin, G. Milstein-Type Procedures for Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. *SIAM Journal on Numerical Analysis 55*, 2 (2017), 953–979.

[4] Nguyen, S. L., and Yin, G. Pathwise convergence rates for numerical solutions of Markovian switching stochastic differential equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications 13*, 3 (2012), 1170–1185.

[5] Yin, G., Mao, X., Yuan, C., and Cao, D. Approximation Methods for Hybrid Diffusion Systems with State-Dependent Switching Processes: Numerical Algorithms and Existence and Uniqueness of Solutions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 41*, 6 (2010), 2335–2352.

[6] Yuan, C., and Mao, X. Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching. *Mathematics and Computers in Simulation 64*, 2 (2004), 223–235.

[7] Zhang, Q. Stock Trading: An Optimal Selling Rule. *SIAM Journal on Control and Optimization 40*, 1 (2001), 64–87.