

## Códigos de bloco espaço-tempo diagonais sobre $\mathbb{Q}(i)$

Victor Yoshiaki Obana Travassos<sup>1</sup>

Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

João Gabriel Oliveira de Jesus<sup>2</sup>

Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

Carina Alves<sup>3</sup>

Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

Diversidade máxima (maior confiabilidade do sinal) e maior determinante mínimo normalizado (menor probabilidade de erro ponto a ponto) são os dois mais importantes critérios para construir bons códigos de bloco espaço-tempo. Neste trabalho apresentamos um código de bloco espaço-tempo que possui diversidade máxima, denominado *Código de Bloco Espaço-Tempo Diagonal*, que é dado pela matriz

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + \theta_1 z_2 & 0 \\ 0 & z_1 + \theta_2 z_2 \end{pmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i] \right\} \quad (1)$$

cuja matriz geradora  $G$  do reticulado complexo é dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \theta_1 \\ 1 & \theta_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

em que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são raízes do polinômio minimal  $x^2 + ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ .

Nossa proposta é obter extensões quadráticas ótimas sobre  $\mathbb{Q}(i)$ , a fim de maximizar o determinante mínimo normalizado do código.

Note que código  $C$  é determinado por um polinômio quadrático sobre  $\mathbb{Z}[i]$ , assim é de nosso interesse determinar esse polinômio de modo que o determinante mínimo normalizado do código  $C$  seja o maior possível. Para isso, primeiramente descrevemos explicitamente a relação entre o discriminante  $\Delta$  do polinômio quadrático  $x^2 + ax + b$  e o determinante da matriz geradora  $G$ , a saber  $\Delta = \det(G)^2$ .

Usando a relação entre o determinante do reticulado complexo e o determinante do reticulado real introduzida em [3], podemos expressar o determinante mínimo normalizado de  $C$ , denotado por  $d_m$ , como

$$d_m = \frac{1}{|\det(G)|} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}. \quad (3)$$

Da Equação (3) notamos que maximizar  $d_m$  é equivalente a minimizar o valor absoluto do discriminante de um polinômio quadrático. Nesse sentido, é de grande interesse investigar a existência de uma cota inferior para o valor absoluto do discriminante de um polinômio quadrático minimal qualquer sobre  $\mathbb{Z}[i]$ .

Apresentamos resultados que solucionam as questões propostas neste trabalho utilizando as referências [1–4]. Mais especificamente, provamos que para qualquer polinômio  $x^2 + ax + b$  sobre

---

<sup>1</sup>victor.yoshiaki@unesp.br

<sup>2</sup>jg.oliveira1968@gmail.com

<sup>3</sup>carina.alves@unesp.br

$\mathbb{Z}[i]$ , o valor absoluto do seu discriminante é limitado inferiormente por 3 e, conseqüentemente, exibimos um limitante para o determinante mínimo normalizado do código.

## Agradecimentos

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2019/20800-8.

## Referências

- [1] Damen, M.O., Tewfik, A. and Belfiore, J.-C. A construction of a space-time code based on number theory, *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(3): 753–760, 2002. DOI: 10.1109/18.986032.
- [2] Liao, H., Wang, H. and Xia, X.-G. Some designs and normalized diversity product upper bound for lattice-based diagonal and full-rate space-time block codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(2): 569–583, 2009. DOI: 10.1109/TIT.2008.2009851.
- [3] Wang, G., Liao, H., Wang, H. and Xia, X.-G. Systematic and optimal cyclotomic lattice and diagonal space-time block code designs, *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(2): 3348–3360, 2004. DOI: 10.1109/TIT.2004.838096.
- [4] Wang, G. and Xia, X.-G. On optimal multilayer cyclotomic space-time code designs, *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3): 1102–1135, 2005. DOI: 10.1109/TIT.2004.842630.
- [5] Wang, G., Zhang, J.K. and Amin, M. Space-time block code designs based on quadratic field extension for two-transmitter antennas, *IEEE Transactions on Information Theory*, 58(6): 4005–4013, 2012. DOI: 10.1109/TIT.2012.2184633.