Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Frequências e Modos de Vibração em um Sistema de Duas Vigas Acopladas Elasticamente

Bruna Silveira Pavlack[1]
Programa de Pós Graduação em Matemática, UFSM, Santa Maria, RS
Rosemaira D. Copetti[2]
Departamento de Matemática, UFSM, Santa Maria, RS

1 Introdução

Nos dias de hoje, um dos principais desafios nas engenharias mecânica, civil, aeroespacial, entre outras, é a busca de soluções que sejam eficientes e que proporcionem a melhor relação custo benefício possível. A análise modal é uma ferramenta de grande interesse utilizada no estudo e avaliação do comportamento estrutural de sistemas mecânicos. O objetivo deste trabalho é determinar as frequências naturais e os modos de vibração de uma estrutura composta por duas vigas acopladas elasticamente e modeladas pela teoria de Timoshenko, através da análise modal e da resposta impulso matricial.

2 Equações de Movimento

As equações diferenciais que regem a vibração de flexão de um sistema composto por duas vigas (1), derivadas por meio do princípio de Hamilton, e incluindo os efeitos da deformação por cisalhamento e de inércia rotativa e sem forçantes externos, são dadas por, [3],

$$\begin{aligned}
&m_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - K_1G_1A_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right) + k(w_1 - w_2) = 0,\\
&m_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - K_2G_2A_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right) - k(w_1 - w_2) = 0,\\
&\rho_1 I_1\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - K_1G_1A_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \theta_1\right) - E_1I_1\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0,\\
&\rho_2 I_2\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - K_2G_2A_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - \theta_2\right) - E_2I_2\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

onde $i = 1, 2$, correspondem a viga inferior e a viga superior, respectivamente, $w_i(x,t)$ a deflexão das vigas, $\theta_i(x,t)$ o ângulo de rotação das vigas, $m_i, \rho_i, K_i, G_i, A_i, E_i, I_i$, os parâmetros das vigas e k a constante da mola no acoplamento.

[1]brunapavlack@gmail.com
[2]rmaira@smail.ufsm.br

3 Formulação Matricial

Matricialmente, as equações (1) podem ser escritas na forma

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbb{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

onde $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$ são matrizes cujos os elementos são operadores lineares espaciais e $\mathbf{v} = [w_1 \; w_2 \; \theta_1 \; \theta_2]^T$.

A solução para a equação (2) pode ser escrita como, [2, 4],

$$\mathbf{v}(t,x) = e^{\lambda t}\mathbf{V}(x), \quad \mathbf{V}(x) = \left(W_1(x) \; W_2(x) \; \Theta_1(x) \; \Theta_2(x) \;\right)^T, \tag{3}$$

gerando o problema de autovalor quadrático, $(\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{K})\mathbf{V}(x) = 0$, onde $\lambda = i\omega$ e ω é a frequência natural de vibração. A solução, $\mathbf{V}(x)$, deve satisfazer

$$\mathbf{V}''(x) + (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})\mathbf{V}'(x) + (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C})\mathbf{V}(x) = 0, \tag{4}$$

para apropriadas matrizes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$. A solução para (4) pode ser dada por, [1],

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2, \tag{5}$$

onde $\varphi = \{\mathbf{h}, \mathbf{h}'\}$ é a base de soluções e $\mathbf{h}(x)$, resposta impulso matricial, é solução do problema de valor inicial,

$$\mathbf{h}''(x) + (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})\mathbf{h}'(x) + (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C})\mathbf{h}(x) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}. \tag{6}$$

Para determinadas condições de contorno do problema (1) e devido as condições iniciais em (6), os modos de vibração dados pela equação (5) podem ser simplificados. Por exemplo, para um sistema composto por duas vigas acopladas e fixas em $x = 0$, a forma dos modos é reduzida a $\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1$.

4 Conclusões

Para determinar as frequências naturais e os modos de vibração de um sistema composto por duas vigas acopladas e modeladas pela teoria de Timoshenko, foi utilizada a resposta impulso matricial. Os cálculos são simplificados para apropriadas condições de contorno e devido as condições iniciais de um problema de valor inicial escrito em termos da respota impulso.

Referências

[1] J. R. Claeyssen, G. Canahualpa and C. Jung. A direct approach to second order matrix non-classical vibrating equations, *Appl. Num. Math.*, 30:65–78, 1999.

[2] S. G. Kelly. *Advanced vibration analysis.* Taylor & Francis, New York, 2006.

[3] J. Li and H. Hua. Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems, *Finite Elem. Anal. Des.*, 43:1155–1168, 2007.

[4] S. S. Rao. *Vibration of continuous systems.* John Wiley & Sons, New Jersey, 2007.

