Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Cálculo de Pontos de Superconvergência da Derivada Primeira de Interpolantes de Elementos Hierárquicos de Peano em 1D

Matheus Lopes Peres[1]
Departamento de Engenharia Civil, UFS, São Cristovão, SE
David Soares Pinto Júnior[2]
Departamento de Matemática, UFS, São Cristovão, SE

1 Introdução

Neste trabalho, será apresentado uma generelização das idéias introduzidas inicialmente pelo Prof. G.F. Carey [1] e extendidas posteriormente por Pinto [2] para bases de elementos finitos de Lagrange e de Hermite em uma dimensão. Carey aplicou o Teorema de Rolle para interpolantes de elementos finitos da base de Lagrange em 1D para deduzir pontos superconvergentes para derivada primeira, usando a série de Taylor [1].

Neste estudo, serão apresentados os pontos superconvergentes para a derivada primeira de interpolantes da família de elementos finitos hierárquicos de Peano unidimensionais. É provado que o centróide do elemento é superconvergente para derivada primeira se uma base hierárquica quadrática é usada $k = 2$. Considerando-se a base quadrática de elementos finitos hieráquicos a derivada da interpolante é definida por:

$$u_h'(\overline{x}) = u_0 L_0'(\overline{x}) + u_1 L_1'(\overline{x}) + \alpha_2 p_2'(\overline{x}), \tag{1}$$

em que u_0,u_1 e α_2 são graus de liberdade nodais. Usando-se a expansão em Série de Taylor na vizinhança do ponto superconvergente $\bar{x}$, tem-se num elemento finito de pontos nodais x_0, x_1, x_2:

$$\begin{aligned} u_h' = u(\overline{x}) \left[L_0' + L_1'\right] + u'(\overline{x}) \left[L_0'(x_0 - \overline{x}) + L_1'(x_1 - \overline{x})\right] + \\ u''(\overline{x}) \left[p_2' + L_1' \left(\frac{x_1 - \overline{x}^2}{2!}\right) + L_0' \left(\frac{x_0 - \overline{x}^2}{2!}\right)\right] + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Neste ponto é necessário aplicar as identidades de completeza relativas a base de funções hierárquicas de Peano em 1D, isto é:

[1]matheuslperes@gmail.com.br
[2]david@ufs.br

$$\left| \begin{array}{l} 1 = L_0(x) + L_1(x) \Rightarrow 0 = L_0'(x) + L_1'(x), \\ x = x_0 L_0(x) + x_1 L_1(x) \Rightarrow 1 = x_0 L_0'(x) + x_1 L_1'(x), \\ x^2 = -x_0^2 L_0(x) - x_1^2 L_1(x) - \frac{(x_1-x_0)^2}{4} p_2(x) \Rightarrow 2x = -x_0^2 L_0'(x) - x_1^2 L_1'(x) - \frac{(x_1-x_0)^2}{4} p_2'(x). \end{array} \right. \tag{3}$$

Daí, segue-se que o erro na derivada primeira $e'(\bar{x})$ no ponto superconvergente $\bar{x}$ é calculado de:

$$e'(\bar{x}) = u_h'(\bar{x}) - u'(\bar{x}) = u''(\bar{x}) \left[\frac{(x_0-\bar{x})^2}{2!(x_0-x_1)} + \frac{(x_1-\bar{x})^2}{2!(x_1-x_0)} - \frac{4(2\bar{x}-x_0-x_1)}{(x_1-x_0)^2} \right] + \\ u'''(\bar{x}) \left[\frac{(x_0-\bar{x})^3}{3!(x_0-x_1)} + \frac{(x_1-\bar{x})^3}{3!(x_1-x_0)} - \frac{4(2\bar{x}-x_0-x_1)}{(x_1-x_0)^2} \frac{\bar{x}(x_2-\bar{x})}{1!} \right] + \cdots \tag{4}$$

Da definição de ponto superconvergente $\bar{x}$ apresentada por Pinto Jr. [2], tem-se que $\bar{x}$ é o zero de função de superconvergência $s_2(\bar{x})$, donde:

$$s_2(\bar{x}) = \left[\frac{(x_0-\bar{x})^2}{2!(x_0-x_1)} + \frac{(x_1-\bar{x})^2}{2!(x_1-x_0)} - \frac{4(2\bar{x}-x_0-x_1)}{(x_1-x_0)^2} \right] = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{(x_0+x_1)}{2}. \tag{5}$$

Neste caso, a ordem de convergência do erro na derivada primeira é ao menos de $|e'(\bar{x})| = O(h^3)$.

2 Conclusões

É conclusivo afirmar que a Teoria de Superconvergência do Professor G.F. Carey pode ser generalizada para as bases hierárquicas de Peano. É importante notar que o centróide do elemento hierárquico quadrático é superconvergente para a derivada primeira com $O(h^3)$. Diferentemente, na base de Lagrange linear o centróide é conservado superconvergente, mas o $|e'(\bar{x})| = O(h^2)$.

3 Agradecimentos

O primeiro autor é grato ao programa Jovens Talentos Para Ciência da CAPES.

Referências

[1] R. J. Mackinnon and G.F. Carey. Superconvergent derivatives: A Taylor series analysis,*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 28, pp. 489-509, 1989.

[2] D. S. Pinto Jr. Studies on Barlow points, Gauss points and Superconvergent points in 1D with Lagrangian and Hermitian finite element basis, *Computational and Applied Mathematics*, volume 27, N. 3, pp. 275-303, 2008.