Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Órbitas Periódicas Hiperbólicas na Fronteira da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Discretos

Elaine Santos Dias[1]
Departamento de Engenharia Elétrica, USP, São Carlos, SP
Luís Fernando Costa Alberto[2]
Departamento de Engenharia Elétrica, USP, São Carlos, SP
Fabíolo Moraes Amaral[3]
IFBA - Instituto Federal de Esducação, Ciência e Tecnologia da Bahia , Eunápolis, Bahia

1 Introdução

Neste trabalho, é desenvolvida uma caracterização da fronteira da região de estabilidade através das variedades invariantes de órbitas periódicas e pontos fixos de um sistema dinâmico discreto, generalizando os resultados de caracterização apresentados em [1].

2 Caracterização da fronteira da região de estabilidade

Considere os seguintes sistemas dinâmicos discretos não lineares

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{1}$$

$$x_{m+1} = f^p(x_m) \tag{2}$$

para algum $p \in \mathbb{Z}$ maior que 1. Chamaremos o sistema (2) de *sistema p-associado* .

Um ponto x^* é um *ponto periódico* de período p do sistema (1) se $f^p(x^*) = x^*$ e $f^k(x^*) \neq x^*$ para todo k satisfazendo $0 < k < p$. Chamaremos de *órbita periódica* de período p do sistema (1) a sequência $\gamma = \left\{x^*, f(x^*), ..., f^{p-1}(x^*)\right\}$. Segundo [3], uma órbita periódica γ de período p do sistema (1) é hiperbólica se, e só se, cada ponto da órbita é um ponto fixo hiperbólico do sistema p-iterado (2). Além disso, se $f(x^*) = x^*$ diremos que x^* é um *ponto fixo* do sistema (1).

Lema 2.1. *Seja x^* um ponto p-periódico do sistema original (1), então x^* é um ponto fixo do sistema p-iterado associado (2).Em particular, se x^* é um ponto fixo do sistema (1), então x^* é um ponto fixo do sistema (2). Além disso, se x^s é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema original (1), então x^s é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (2) para todo $p \geq 1$.*

[1]elainesantosd@usp.br
[2]lfcalberto@usp.br
[3]fabiolo@ifba.edu.br

Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (1) e (2), definimos a *região de estabilidade* para o sistema (1) como o conjunto das condições iniciais cujas iteradas tendem a x^s quando $n \to \infty$, isto é, $A(x^s) = \{x \in M; f^n(x) \to x^s \text{ quando } n \to \infty\}$. Analogamente, definimos a *região de estabilidade* para o sistema p-iterado como $A_p(x^s) = \{x \in M; f^{np}(x) \to x^s \text{ quando } n \to \infty\}$.

Teorema 1. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (1). Então, $A(x^s) = A_p(x^s)$ para todo $p \geq 1$, e $\partial A(x^s) = \partial A_p(x^s)$ para todo $p \geq 1$.*

O teorema 1 mostra que a região de estabilidade $A(x^s)$ do sistema (1) é igual à região de estabilidade $A_p(x^s)$ do sistema (2), logo uma caracterização da fronteira da região de estabilidade $A(x^s)$ do sistema (1) pode ser dada em função da caracterização da fronteira da região de estabilidade $A_p(x^s)$ do sistema (2).

Lema 2.2. *Seja $\gamma = \{x^*, f(x^*), ..., f^{p-1}(x^*)\}$uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (1) onde f é um difeomorfismo. Então, $W^s(\gamma) = W_p^s(x^*) \cup W_p^s(f(x^*)) \cup ... \cup W_p^s(f^{p-1}(x^*))$ e $W^u(\gamma) = W_p^u(x^*) \cup W_p^u(f(x^*)) \cup ... \cup W_p^u(f^{p-1}(x^*))$.*

O lema 2.2, relaciona as variedades invariantes de uma órbita periódica de período p do sistema (1) com as variedades invariantes dos pontos fixos pertecentes à órbita periódica, no sistema p-iterado. Considere as seguintes afirmações: **(A1)** Todos os pontos fixos em $\partial A_p(x_s)$ são hiperbólicos; **(A2)** As variedades invariantes dos pontos fixos em $\partial A_p(x_s)$ satisfazem a condição de transversalidade; **(A3)** Toda trajetória em $\partial A_p(x_s)$ se aproxima de algum ponto fixo quando $n \to \infty$. Sob essas condições, e explorando o lema 2.2,temos a seguinte caracterização:

Teorema 2. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (1) e γ uma órbita periódica hiperbólica de período p, onde f é um difeomorfismo. Suponha que as afirmações, (**A1**), (**A2**) e (**A3**) sejam válidas para o sistema (2). Sejam $\hat{x}_i$ pontos fixos hiperbólicos instáveis ou pontos da órbita periódica γ em $\partial A(x^s)$. Então a fronteira da região de estabilidade fica caracterizada da seguinte maneira: $\partial A(x^s) = \partial A_p(x^s) = \bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i)$.*

3 Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP-Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo (Processo n°2014/14141-8) pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa.

Referências

[1] H-D. Chiang, J. Lee, F. M. Amaral e L.F.C. Albreto. Characterization of Stability Regions of nonlinear discrte dynamical systems, *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, 2012.

[2] C. Robinson.*Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamicas, and Chaos.* 2 ed, CRC, 1999.

[3] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems.* New York, 1987

