

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problema Não Linear de Difusão Fracionária com AbsorçãoF. S. Costa¹

Departamento de Matemática e Informática, UEMA, São Luis, MA

J.A. P. F. Marão²

Departamento de Matemática e Informática, UEMA, São Luis, MA

W. J. V. Lima³

Departamento de Matemática e Informática, UEMA, São Luis, MA

Resumo Neste trabalho, apresentamos algumas propriedades das derivadas fracionárias no sentido de Caputo e Riesz. Aplicando-as em um problema não linear de difusão com absorção. Encontramos soluções do tipo ondas viajantes e analisamos seus gráficos.

Palavras-chave. Derivada Fracionária, Difusão, Ondas Viajantes

1 Introdução

O cálculo fracionário (CF) vem despertando o interesse de várias áreas de pesquisas, principalmente com seu uso na descrição de fenômenos naturais. Em especial, podemos citar os fenômenos difusivos, que não seguem a difusão padrão, chamada difusão anômala [3,4]. Pois, quando usamos o CF, obtemos uma quantidade maior de informações, vinculadas à influência de efeitos não locais, que denominamos efeitos de memória [12]. Porém, devida as diversas formas de introduzirmos o CF, isto se deve ao surgimento de várias definições para derivada fracionária [6], temos uma complexidade de tentar generalizar o cálculo de ordem inteira e resolver os problemas de ordem fracionária.

Podemos dizer, que um dos seus principais representantes é o professor Francesco Mainardi, com seus inúmeros trabalhos, por exemplo [7, 11], e participação em grupos de pesquisas de vários países, incluindo o Brasil. Pelas suas contribuições e divulgações, ocorreu um congresso em sua homenagem, totalmente voltado para o CF, em Bilbao, Espanha, em 2013. No Brasil, o CF cresce consideravelmente, onde podemos citar, como um dos seus divulgadores, o professor Edmundo Capelas de Oliveira e alguns de seus trabalhos [1, 5, 9].

Desenvolvemos este artigo do seguinte modo: Na Seção 2 apresentamos as derivadas fracionárias de Caputo e Riesz, com algumas de suas propriedades. Na Seção 3, utilizamos essas derivadas, num problema não linear de difusão com absorção. Na Seção 4, aplicamos na equação fracionária soluções do tipo ondas viajantes. Na Seção 5, mostramos como

¹felix@cecen.uema.br²josemarao@cecen.uema.br³vieirawellio@gmail.com

encontrar soluções analíticas para o problema fracionário. Na Seção 6, apresentamos algumas dessas soluções, inclusive para o caso de ordem inteira. Na Seção 7, analisamos graficamente os resultados obtidos. Na Seção 8, fazemos as nossas conclusões.

2 Derivadas Fracionárias

2.1 Derivada fracionária de Caputo

De acordo com [1], M. Caputo apresenta em seu livro [2], uma derivada fracionária baseada na derivada de Riemann-Liouville. Com sua definição, resolvemos problemas fracionários com condições iniciais de ordem inteira ⁴.

Definição 2.1. *Sejam o número real $\beta > 0$ e o inteiro $n > 0$, com $n - 1 < \beta \leq n$ a derivada fracionária de Caputo de ordem β é:*

$${}_C D_t^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} d\tau, & n-1 < \beta < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \beta = n, \end{cases} \quad (1)$$

Teorema 2.1. *Seja $f(t) = t^\gamma$, com $\gamma > 0$, então temos a seguinte relação:*

$${}_C D_t^\beta t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\beta)} t^{\gamma-\beta}, \quad \gamma > n \quad (2)$$

Para $f(t) = 1$, temos que ${}_C D_t^\beta 1 = 0$, em consonância com a derivada de ordem inteira, o que não ocorre em relação à derivada de Riemann-Liouville.

2.2 Derivada fracionária de Riesz

Definição 2.2. *A derivada fracionária de Riesz⁵ de ordem α , com $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 1$ é:*

$$R_x^\alpha f(x) = -\frac{D_+^\alpha f(x) + D_-^\alpha f(x)}{2 \cos(\alpha\pi/2)}, \quad (3)$$

onde $D_\pm^\alpha f(x)$ são as derivadas fracionárias de Weyl definidas em [1].

Teorema 2.2. *Seja $h(x) = |x|^{-\alpha-1}$, com $1 < \alpha < 2$. Podemos escrever a derivada fracionária de Riesz de ordem α , por um produto de convolução de Fourier:*

$$R_x^\alpha f(x) = d_\alpha (f * h)(x), \quad \text{com } d_\alpha = -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \quad (4)$$

⁴Antes, eram utilizadas condições iniciais fracionárias nos modelos fracionários, o que não era bem aceito nos problemas físicos.

⁵Esta derivada também é definida pela transformada de Fourier.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 R_x^\alpha f(x) &= \frac{-1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{1-\alpha} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^{\infty} (\xi-x)^{1-\alpha} f(\xi) d\xi \right] \\
 &= \frac{-1}{2\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{-\infty}^x (x-\xi)^{1-\alpha} f(\xi) d\xi + \int_x^{\infty} (\xi-x)^{1-\alpha} f(\xi) d\xi \right] \\
 &= \frac{-1}{2\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi|^{1-\alpha} f(\xi) d\xi = \frac{-1}{2\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} |x-\xi|^{1-\alpha} f(\xi) d\xi \\
 &= \frac{(-1)(1-\alpha)(-\alpha)}{2\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi|^{-1-\alpha} f(\xi) d\xi = -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi|^{-1-\alpha} f(\xi) d\xi \square
 \end{aligned}$$

3 Difusão fracionária com absorção

Investigamos um modelo fracionário não linear de difusão com absorção, com derivadas fracionárias de Caputo e de Riesz, em relação ao tempo e espaço, respectivamente. A primeira como derivada temporal é devido sua definição no semieixo real e relação com a transformada de Laplace, onde obtemos várias propriedades, inclusive que as condições iniciais associadas são de ordem inteira. A segunda, definida no eixo real, tem suas propriedades relacionadas à transformada de Fourier, justificando uso como derivada espacial.

$${}_C D_t^\beta u(x, t) = R_x^\alpha u^n(x, t) - u^p(x, t), \tag{5}$$

em que $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha < 2$, $n > 1$ e $p \in \mathbb{R}$. Podemos observar que o termo absorvente é dado por uma potência da função $u(x, t)$. Analisamos os fenômenos ondulatórios deste modelo, através de soluções do tipo ondas viajantes.

4 Ondas viajantes

Soluções do tipo ondas viajantes são da forma $g(x - ct)$, onde c é a velocidade de onda. Ainda, consideramos a propriedade de escala em relação à variável x , ou seja, $g(x - ct) = x^a g\left(1 - c\frac{t}{x}\right)$. Definimos uma solução para equação (5) por:

$$u(x, t) = x^a U(\eta), \quad \eta = 1 - c\frac{t}{x}, \tag{6}$$

onde a é um parâmetro a ser determinado.

Substituímos a equação (6), no primeiro membro da equação (5):

$${}_C D_t^\beta u(x, t) = {}_C D_t^\beta \left[x^a U\left(1 - c\frac{t}{x}\right) \right] = \frac{(-c)^\beta x^{a-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \int_1^\eta (\eta - v)^{-\beta} U'(v) dv. \tag{7}$$

Usamos o **Teorema 2.2** no cálculo da derivada de Riesz para equação (6):

$$\begin{aligned}
 R_x^\alpha u^n(x, t) &= R_x^\alpha \left[x^{an} U^n\left(1 - c\frac{t}{x}\right) \right] = \\
 &= d_\alpha [1 + (-1)^{-\alpha}] x^{an-\alpha} (1-\eta)^{1+\alpha n} \int_1^\eta (\eta - \psi)^{-1-\alpha} (1-\psi)^{-1+\alpha-an} U^n(\psi) d(\psi). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Quando substituimos as equações (6), (7) e (8) na equação (5), obtemos uma equação:

$$\begin{aligned} & \frac{(-c)^\beta x^{a-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \int_\eta^1 (\eta-v)^{-\beta} U'(v) dv = \\ & = d_\alpha [1 + (-1)^{-\alpha}] x^{an-\alpha} (1-\eta)^{1+\alpha n} \int_\eta^1 (\eta-\psi)^{-1-\alpha} (1-\psi)^{-1+\alpha-an} U^n(\psi) d(\psi) + x^{ap} U^p(\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

Impomos que equação (9) seja invariante, em relação a variável x :

$$a - \beta = an - \alpha = ap. \quad (10)$$

Obtemos uma equação integral:

$$\begin{aligned} & \frac{(-c)^\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_\eta^1 (\eta-v)^{-\beta} U'(v) dv = \\ & = d_\alpha [1 + (-1)^{-\alpha}] (1-\eta)^{1+\alpha n} \int_\eta^1 (\eta-\psi)^{-1-\alpha} (1-\psi)^{-1+\alpha-an} U^n(\psi) d(\psi) + U^p(\eta) \end{aligned} \quad (11)$$

5 Solução analítica

Nesta seção, afim de resolvermos a equação (11), vamos procurar uma solução do tipo monotônica, conhecida como frente de onda, com propagação finita, ou seja, uma onda descrita por um monômio propagando em um dos semieixos de x e anulando na origem ⁶:

$$U(\eta) = \begin{cases} A\eta^k, & n < 0 \\ 0, & \eta \geq 0 \end{cases} . \quad (12)$$

Substituindo a equação (12) na equação (11), encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \frac{(-c)^\beta \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)} A \eta^{k-\beta} = \\ & = d_\alpha [1 + (-1)^{-\alpha}] A^n \eta^{kn-\alpha} \\ & \times (1-\eta)^{1+an} \frac{(-1)^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\alpha+kn)} {}_2F_1(1-\alpha+an, 1+kn; 1-\alpha+kn; \eta) + A^p \eta^{kp}. \end{aligned} \quad (13)$$

Para equação (13) ser invariante em relação a variável η , devemos ter:

$$k = a, \quad (14)$$

fornecendo a equação algébrica:

$$\frac{(-c)^\beta \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)} A^{1-p} - \frac{\exp(-i\alpha\pi/2) \Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\alpha+kn)} A^{n-p} - 1 = 0 \quad (15)$$

⁶Em alguns casos, a propagação de onda no outro semieixo x é obtida por reflexão.

6 Casos particulares

6.1 Soluções estacionárias:

Consideramos a velocidade de propagação da onda $c = 0$ e obtemos da equação (15):

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(-\frac{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+kn)}{\Gamma(1+kn)} \right)^{\frac{1}{n-p}} x^{\frac{\alpha}{n-p}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} . \quad (16)$$

A solução da equação clássica é obtida, quando aplicamos os limites $\beta \rightarrow 1$ e $\alpha \rightarrow 2$:

$$u(x, t) = \begin{cases} \left[\frac{(n-p)^2}{2n(n+p)} \right]^{\frac{1}{n-p}} x^{\frac{2}{n-p}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} , \quad (17)$$

que corresponde a solução apresentada por M. A. Herrero e J. L. Vazquez em [10].

6.2 Caso $n + p = 2$:

Neste caso, a equação (15) fica:

$$\frac{(-c)^\beta \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)} A^{\frac{n-p}{2}} - \frac{\exp(-i\alpha\pi/2) \Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\alpha+kn)} A^{n-p} - 1 = 0 \quad (18)$$

Fazendo $\Theta = A^{\frac{n-p}{2}}$, temos:

$$-\frac{\exp(-i\alpha\pi/2) \Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\alpha+kn)} \Theta^2 + \frac{(-1)^\beta c^\beta \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)} \Theta - 1 = 0. \quad (19)$$

A solução da equação clássica ⁷ é obtida, quando aplicamos os limites $\beta \rightarrow 1$ e $\alpha \rightarrow 2$ na equação (19) e substituímos o resultado na equação (12).

$$u(x, t) = \begin{cases} \left[-\frac{(n-1)(c+\sqrt{c^2+4n})}{2n} (x-ct) \right]^{\frac{1}{n-1}}, & x < ct \\ 0, & x \geq ct \end{cases} , \quad (20)$$

7 Gráficos

Na Figura 1, apresentamos os gráficos de $u(x, t)$, com a variável x fixa. Do mesmo modo, na Figura 2, temos os gráficos de $u(x, t)$, com a variável t fixa. Nestas duas figuras, os valores dos parâmetros β e α aparecem associados nas respectivas curvas. Nas Figuras 3 e 4 mostramos os gráficos de $u(x, t)$, considerando $-1 \leq x \leq 0$ e $0 \leq t \leq 50$ e os parâmetros $(\beta, \alpha) = (1, 2)$ e $(\beta, \alpha) = (0.8, 1.6)$, respectivamente⁸. Assim, podemos observar como os

⁷Maiores detalhes do caso de ordem inteira podem ser vistos em [8].

⁸Nos casos fracionários, apresentamos os gráficos do módulo de $u(x, t)$, pois estamos interessados na magnitude da função.

efeitos de memória influenciam na desaceleração de $u(x, t)$. Eles diminuem à medida que os parâmetros β e α se aproximam dos respectivos valores inteiros 1 e 2, recuperando a solução clássica. Fixamos os valores da velocidade de onda $c = 0.3$ e $n = 6$ para construirmos todos os gráficos. Eles representam casos particulares das soluções descritas pela **Subseção 6.2**, ou seja, satisfazem a equação (19) e a relação $n + p = 2$.

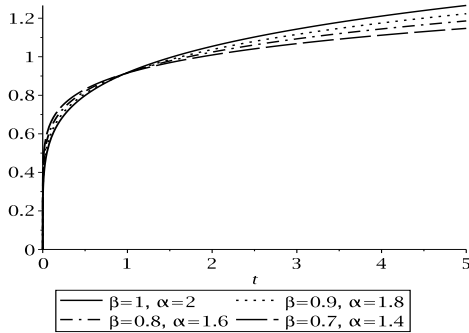


Figura 1: $u(x, t)$ com x fixo.

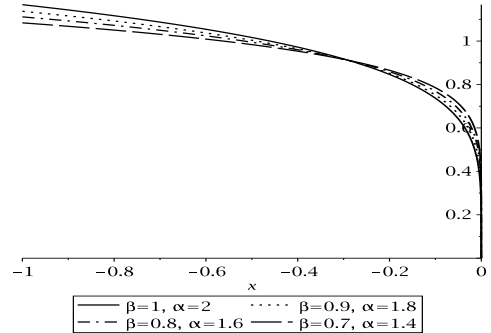


Figura 2: $u(x, t)$ com t fixo.

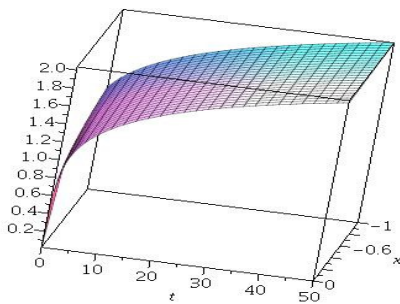


Figura 3: $u(x, t)$ com $(\beta, \alpha) = (1, 2)$.

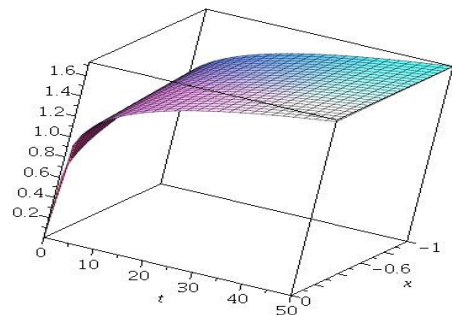


Figura 4: $u(x, t)$ com $(\beta, \alpha) = (0.8, 1.6)$.

8 Conclusões

Ao estudarmos o modelo de difusão com absorção, utilizando as derivadas fracionárias de Caputo e Riesz, buscamos uma forma de investigar os efeitos de memória nesse fenômeno. Estes tem sido observados em diversos problemas difusivos, especificamente, os anômalos. Destacamos que o **Teorema 2.2** é uma ferramenta fundamental no desenvolvimento deste trabalho, pois nos possibilita calcularmos a derivada fracionária de Riesz, podemos encontrar um resultado similar em [9]. Acrescentamos ainda, que as soluções encontradas são crescentes, ilimitadas e se aproximam de zero para $|x| \rightarrow 0$ e $t \rightarrow 0$. Nos casos particulares da **Subseção 6.2**, devido ao fato de $n + p = 2$, obtemos uma relação adicional $\alpha = 2\beta$, ou seja, a solução satisfaz a condição $n + p = 2$ se, e somente se, α é o dobro de β , esta

condição é obtida da equação (10). Portanto, uma continuação natural do nosso artigo seria investigar as soluções fracionárias que não satisfazem essa condição, isto é, $n + p \neq 2$.

Referências

- [1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. *Cálculo Fracionário*. Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- [2] M. Caputo. *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli, Bologna, 1969.
- [3] F. S. Costa and E. C. de Oliveira, Fractional wave-diffusion equation with periodic conditions, *J. Math. Phys*, 53:123520, 2012. DOI:10.1063/1.4769270
- [4] F. S. Costa, J. A. P. F. Marão, J. C. A. Soares, and E. C. de Oliveira, Similarity solution to fractional nonlinear space-time diffusion-wave equation, *J. Math. Phys*, 56: 033507, 2015. DOI:10.1063/1.4915293.
- [5] E. C. de Oliveira, J. V. Junior and F. S. Costa, The fractional Schrödinger equation for delta potential, *J. Math. Phys*, 51: 123517, 2010. DOI:10.1063/1.3525976.
- [6] E. C. de Oliveira and J. A. T. Machado, A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral, *Math. Prob. Eng.*, 2014:238459, 2014.
- [7] E. C. de Oliveira, F. Mainardi and J. V. Junior, Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function, *Mecc.*, 49:2049-2060, 2014. DOI:10.1007/s11012-014-9930-0.
- [8] B.H. Gilding and R. Kersner. *Travelling Waves in Nonlinear Reaction-Convection-Diffusion*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [9] E. C. Grigoletto and E. C. de Oliveira, Fractional versions of the fundamental theorems of calculus, *App. Math.*, 4:23-33, 2013. DOI:10.4236/am.2013.47A006.
- [10] M. A. Herrero and J. L. Vazquez, Thermal Waves in Absorbing Media, *J. Diff. Eq.*, 74:218-233, 1988.
- [11] Y. Luchko and F. Mainardi, Cauchy and signaling problems for the time-fractional diffusion-wave equation, *J. Vib. Acous.*, 136: 051008, 2014. DOI:10.1115/1.4026892
- [12] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Wave in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press, London, 2010.