Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard

Daniela dos Santos de Oliveira[1]
Edmundo Capelas de Oliveira[2]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Resumo O cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário, pode ser visto como uma generalização da integração e diferenciação ordinárias, isto é, a passagem da ordem inteira para a não inteira ou até mesmo complexa. Vamos nos concentrar na formulação de Caputo-Hadamard, recentemente introduzida. Apresentaremos sua definição e algumas de suas propriedades, bem como o teorema fundamental do cálculo fracionário a ela associado. Como aplicação, obtemos a solução de uma particular equação diferencial fracionária.

Palavras-chave. Derivada fracionária, Caputo-Hadamard, teorema fundamental do cálculo fracionário, equação diferencial fracionária

1 Introdução

O cálculo fracionário (CF) nome popularizado para cálculo integral e diferencial de ordem não inteira é da mesma época que o cálculo integral e diferencial conforme proposto, independentemente, por Newton e Leibniz. É costume mencionarmos uma correspondência trocada por Leibniz e l'Hôpital datada do ano de 1695, como sendo o possível início do que viria a se constituir na futura teoria. Nesta correspondência l'Hôpital questionava Leibniz sobre a derivada de ordem não inteira, em particular, a derivada de ordem meio. Leibniz responde em tom profético, que isto ainda viria a gerar uma longa série de estudos e pesquisas [1, 5].

Existem maneiras distintas de introduzir o conceito de integrais e derivadas fracionárias, porém não necessariamente estas coincidem [6]. Introduzimos as integrais e derivadas fracionárias segundo Hadamard [4] e uma modificação para estas derivadas dando assim origem às derivadas de Caputo-Hadamard [3].

Neste trabalho, primeiramente, apresentamos as integrais e derivadas fracionárias no sentido de Hadamard. Na seção 2 introduzimos as integrais e derivadas no sentido de Caputo-Hadamard a fim de discutir algumas propriedades, em particular, um similar teorema fundamental do cálculo fracionário para estas integrais e derivadas.

Apresentamos, a seguir, a definição das integrais e derivadas de ordem não inteira propostas por Hadamard.

[1] ra142310@ime.unicamp.br
[2] capelas@ime.unicamp.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Definição 1.1 (Integrais fracionárias segundo Hadamard)**.** *Sejam* (a, b) $(0 \leq a < b \leq \infty)$ *um intervalo limitado ou ilimitado de* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$*. As integrais fracionárias de Hadamard de ordem* $\alpha \in \mathbb{C}$*, à esquerda e à direita, são definidas, respectivamente, por*

$$\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \qquad a < x < b \tag{1}$$

e

$$\mathcal{J}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \qquad a < x < b. \tag{2}$$

Definição 1.2 (Derivadas fracionárias segundo Hadamard)**.** *As derivadas fracionárias de Hadamard de ordem* $\alpha \in \mathbb{C}$*, onde* $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ *em* (a, b)*,* $a < x < b$*, são definidas, à esquerda e à direita, respectivamente, por*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) := \delta^n \mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\varphi(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t} \tag{3}$$

e

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) := \delta^n \mathcal{J}^{n-\alpha}_{b-}\varphi(x) = \left(-x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \tag{4}$$

onde $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ *é a parte inteira de* $\mathrm{Re}(\alpha)$ *e* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$*.*

A fim de deixar o trabalho autoconsistente, apresentamos o lema a seguir que será utilizado na demonstração do teorema fundamental do cálculo fracionário associado às integrais e derivadas fracionárias no sentido de Caputo-Hadamard.

Lema 1.1 (Propriedade de semigrupo das integrais e derivadas fracionárias segundo Hadamard)**.** *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tais que* $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$

(i) *Se* $0 < a < b < \infty$ *e* $1 \leq p < \infty$*, então para* $\varphi(x) \in L^p(a, b)$*,*

$$\mathcal{D}^{\beta}_{a+}\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \mathcal{J}^{\alpha-\beta}_{a+}\varphi(x) \qquad e \qquad \mathcal{D}^{\beta}_{b-}\mathcal{J}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) = \mathcal{J}^{\alpha-\beta}_{b-}\varphi(x); \tag{5}$$

(ii)

$$\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}\mathcal{J}^{\beta}_{a+}\varphi(x) = \mathcal{J}^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi(x) \qquad e \qquad \mathcal{J}^{\alpha}_{b-}\mathcal{J}^{\beta}_{b-}\varphi(x) = \mathcal{J}^{\alpha+\beta}_{b-}\varphi(x). \tag{6}$$

2 Derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard

A seguir, apresentamos a definição da derivada de ordem não inteira segundo Caputo-Hadamard, a qual surgiu através de uma modificação na derivada fracionária conforme proposta por Hadamard [2, 3]. No decorrer deste trabalho, consideraremos o conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $\mathrm{AC}[a, b]$ o espaço de funções absolutamente contínuas no intervalo $[a, b]$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0207

Definição 2.1 (Derivada fracionária segundo Caputo-Hadamard)**.** *Sejam* $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ *e* $\varphi \in \mathrm{AC}_\delta^n[a,b]$, $0 < a < b < \infty$. *Então,* ${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(x)$ *e* ${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(x)$ *existem em* $[a,b]$ *e são definidas, à esquerda e à direita, respectivamente, por*

$$ {}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(x) := \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k\varphi(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k\right] \tag{7}$$

e

$$ {}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(x) := \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\delta^k\varphi(b)}{k!}\left(\ln\frac{b}{x}\right)^k\right], \tag{8}$$

onde $\mathrm{AC}_\delta^n[a,b] = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}\varphi(x) \in \mathrm{AC}[a,b], \delta = x\frac{d}{dx}\}$. *Em particular, se* $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, *temos*

$$ {}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(x) - \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(a), \tag{9}$$

e

$$ {}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(x) - \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(b). \tag{10}$$

3 Propriedades e teorema fundamental do cálculo fracionário para as derivadas fracionárias segundo Caputo-Hadamard

Algumas propriedades da derivada fracionária de Caputo-Hadamard são apresentadas bem como o teorema fundamental do cálculo fracionário a ela associado.

Proposição 3.1. *Se* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $0 < a < b < \infty$, *então, temos que*

(i) $\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}\left[\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}, \qquad \mathrm{Re}(\beta) > n,$

(ii) ${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left[\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \qquad \mathrm{Re}(\beta) > n.$

Se $\beta = k+1$, *temos que*

$$ {}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Em particular,

$$ {}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}1 = 0. \tag{12}$$

O teorema a seguir mostra uma outra forma de escrever a derivada de ordem não inteira segundo Caputo-Hadamard.

Teorema 3.1. *Seja* $\mathbb{R}(\alpha) \geq 0$, $n = [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$ *e* $\varphi(x) \in \mathrm{AC}_\delta^n[a,b]$, $0 < a < b < \infty$. *Então,* ${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\varphi(x)$ *e* ${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\varphi(x)$ *existem em* $[a,b]$ *e*

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0207

(i) *se* $\alpha \notin \mathbb{N}_0$

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-a)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\varphi(t)\frac{dt}{t} = \mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\delta^n\varphi(x), \tag{13}$$

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_b^x \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\varphi(t)\frac{dt}{t} = (-1)^n\mathcal{J}^{n-\alpha}_{b-}\delta^n\varphi(x); \tag{14}$$

(ii) *se* $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$,

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \delta^n\varphi(x), \qquad {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) = (-1)^n\delta^n\varphi(x). \tag{15}$$

Em particular,

$$ {}^C\mathcal{D}^{0}_{a+}\varphi(x) = {}^C\mathcal{D}^{0}_{b-}\varphi(x) = \varphi(x). \tag{16}$$

Demonstração. Para demonstrar a primeira parte deste teorema devemos admitir, na definição da derivada de Hadamard à esquerda, Eq.(3), que a função $\varphi(t)$ será dada pela Eq.(7). Assim, devemos integrar por partes, considerando

$$ u = \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k\varphi(a)}{k!}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^k \qquad \text{e} \qquad dv = \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{dt}{t} \tag{17}$$

e, logo após derivar. Desta forma, obteremos uma expressão a qual deveremos integrar, por partes, novamente, considerando o mesmo dv e também derivá-la. Fazendo isto n vezes, segue o resultado. □

Após apresentar os operadores de integração e diferenciação fracionários no sentido de Caputo-Hadamard, vamos enunciar e demonstrar o teorema fundamental do cálculo fracionário associado a estes operadores [2, 3]. Para tanto, consideremos o operador de integração segundo Hadamard e o operador de diferenciação segundo Caputo-Hadamard. Este teorema será utilizado para obter a solução de uma equação diferencial fracionária.

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário)**.** *Sejam* $\alpha \in \mathbb{C}$ *com* $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ *e* $\varphi(x) \in \mathrm{AC}^n_\delta[a,b]$, $0 < a < b < \infty$.

(i) *Se* $\Phi(x) = \mathcal{J}^{\alpha}_{a+}\varphi(x)$ *ou* $\Phi(x) = \mathcal{J}^{\alpha}_{b-}\varphi(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *então*

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\Phi(x) = \varphi(x), \qquad {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\Phi(x) = \varphi(x). \tag{18}$$

(ii)

$$ {}_a\mathcal{J}^{\alpha}_b({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+})\Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad {}_a\mathcal{J}^{\alpha}_b({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b-})\Phi(x) = \Phi(a) - \Phi(b). \tag{19}$$

Demonstração. (i) A partir do lema 2.4 em [3] podemos notar que, as integrais fracionárias propostas por Hardamard e as derivadas fracionárias no sentido de Caputo-Hadamard são operadores inversos, isto é,

$$({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+}\mathcal{J}^\alpha_{a+})\varphi(x) = \varphi(x) \qquad e \qquad ({}^C\mathcal{D}^\alpha_{b-}\mathcal{J}^\alpha_{b-})\varphi(x) = \varphi(x). \tag{20}$$

Assim, se $\Phi(x) = \mathcal{J}^\alpha_{a+}\varphi(x)$ ou $\Phi(x) = \mathcal{J}^\alpha_{b-}\varphi(x)$, obtemos, imediatamente, as expressões na Eq.(18).

(ii) Utilizando a Eq.(13), podemos escrever

$$(\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\Phi(x) = (\mathcal{J}^\alpha_{a+}\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\delta^n)\Phi(x). \tag{21}$$

Neste caso, utilizamos a primeira equação de (6), ou seja,

$$(\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\Phi(x) = (\mathcal{J}^n_{a+}\delta^n)\Phi(x). \tag{22}$$

Em particular, se $n = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\Phi(x) &= (\mathcal{J}^1_{a+}\delta^1)\Phi(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x \frac{dt}{t}\left(t\frac{d}{dt}\right)\Phi(t) \\
&= \int_a^x \left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right) dt \\
&= \Phi(x) - \Phi(a),
\end{aligned} \tag{23}$$

o que implica em

$$ {}_a\mathcal{J}^\alpha_b({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\Phi(x) = \int_a^b \left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right) dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{24}$$

A partir do lema 2.5 de [3], temos

$$(\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k\varphi(a)}{k!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k. \tag{25}$$

Em particular, se $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, então $n = 1$ e $\Phi(x) \in AC_\delta[a,b]$ ou $\Phi(x) \in C_\delta[a,b]$. Assim,

$$\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+}\Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{26}$$

Segue que, ${}_a\mathcal{J}^\alpha_b({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+})\Phi(x)$ resulta na primeira equação de (19).

□

4 Aplicação

Nesta seção resolvemos uma equação diferencial fracionária através do teorema fundamental do cálculo fracionário associado às derivadas segundo Caputo-Hadamard.

Considere o problema de valor inicial fracionário

$$
\begin{gathered}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = c,\\
\varphi(a) = 0,
\end{gathered}
$$

onde c e a são constantes não nulas, $x > 0$ e $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$.

Aplicando o operador de integração fracionário à esquerda $\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}$, segundo Hadamard, na equação diferencial e utilizando a Eq.(26), temos que

$$
\begin{gathered}
\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \mathcal{J}^{\alpha}_{a+}c\\
\varphi(x) - \varphi(a) = \frac{c}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}.
\end{gathered}
$$

Note que, para calcular $\mathcal{J}^{\alpha}_{a+}c$ basta admitir $\beta = 1$ na Proposição 3.1, item (i). Segue que a solução é dada por

$$
\varphi(x) = \frac{c}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}. \tag{27}
$$

Quando $c = a = 1$, temos como solução

$$
\varphi(x) = \frac{[\ln(x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{28}
$$

A seguir, o gráfico para a solução (28) com alguns valores de α.

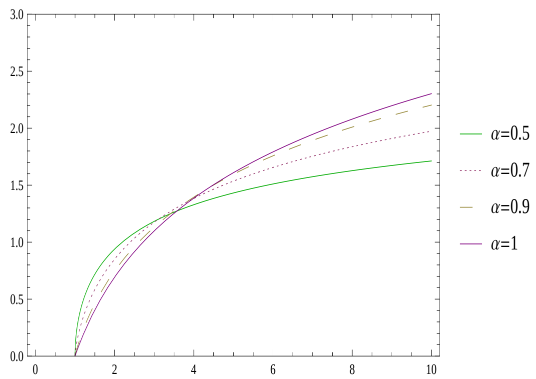

Figura 1: Função $\varphi(x) = \dfrac{[\ln(x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0207

5 Conclusões

Introduzimos as derivadas fracionárias no sentido de Caputo-Hadamard a fim de demonstrar o chamado teorema fundamental do cálculo fracionário associado à integral e à derivada de Caputo-Hadamard. Ressaltamos que, num recente trabalho foi discutido o teorema fundamental do cálculo, em sua versão fracionária, envolvendo as derivadas no sentido de Riemann-Liouville e no sentido de Caputo [7].

Como aplicação desse teorema, resolvemos uma simples equação diferencial fracionária envolvendo a derivada de Caputo-Hadamard. Uma continuação natural deste trabalho é discutir a solução de uma equação diferencial fracionária onde a função de Mittag-Leffler emerge naturalmente.

Referências

[1] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira. Cálculo fracionário, *Editora Livraria da Física*, São Paulo, 2015.

[2] Y. Y. Gambo, F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad. On Caputo modification of the Hadamard fractional derivative, *Advances in Difference Equations*, Springer, volume 2014, número 1, pages 1–12, 2014.

[3] F. Jarad, T. Abdeljawad and D. Baleanu. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivative. *Advances in Difference Equations*, Springer, volume 2012, número 1, pages 1–8, 2012.

[4] A. A. Kilbas. Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, volume 38, número 6, pages 1191–1204, 2001.

[5] K. S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional diferential equations, *John Wiley & Sons, Wiley–Interscience*, New York, 1993.

[6] E. Capelas de Oliveira and J. Tenreiro Machado. A review of definitions for fractional derivatives and integral, *Mathematical Problems in Engineering*, volume 2014, pages 1–6, 2014. Article ID 238459.

[7] E. Contharteze Grigoletto and E. Capelas de Oliveira. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus, *Appl. Math.*, volume 4, pages 23–33, 2013.

