Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelo em coordenadas generalizadas para o fluxo de água no lago Luruaco, Colômbia

Tatiana Mari Saita[1]
Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR
Paulo L. Natti,[2]
Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR
Eiandro R. Cirilo,[3]
Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR
Neyva M. L. Romeiro[4]
Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR

1 Introdução

O lago Luruaco que está localizado no Departamento do Atlántico, Colômbia é fonte de abastecimento de água para o município de Luruaco e também é utilizado para a agricultura e pecuária, atividades que afetam diretamente a qualidade da água [1]. Considerando os fatos mencionados, o presente estudo tem por objetivo apresentar um modelo matemático bidimensional horizontal, no sistema de coordenadas generalizadas, para avaliar o fluxo de água no lago Luruaco. Tal estudo permitirá descrever o fluxo hidrodinâmico da superfície do lago (campo de velocidades e pressões).

2 Modelo matemático

O modelo matemático (bidimensional horizontal) utilizado, considera o sistema de Navier-Stokes para descrever o fluxo da água na superfície do lago Luruaco. As equações são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0,\\ \frac{\partial \rho u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho u}{\partial x}+v\frac{\partial \rho u}{\partial y} &= \rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial \rho v}{\partial t}+u\frac{\partial \rho v}{\partial x}+v\frac{\partial \rho v}{\partial y} &= \rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\end{aligned} \tag{1}$$

[1]tatianasaita@gmail.com
[2]plnatti@uel.br
[3]ercirilo@uel.br
[4]nromeiro@uel.br

onde as componentes u e v representam a velocidade do fluxo do corpo d'água e dependem das variáveis espaciais e do tempo. O termo p representa a pressão, $g = (g_x, g_y)$ representa a gravidade e ρ e μ representam densidade e viscosidade dinâmica, respectivamente [2].

Note que o sistema (1) está em coordenadas cartesianas. Levando em consideração a geometria irregular do lago e as condições externas (como os ventos e os afluentes), utilizaremos as coordenadas generalizadas que melhor se adaptam a essas geometrias e condições. Assim, aplicando as métricas de transformação para coordenadas generalizadas, obtém-se o modelo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho x}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho y}{\partial \eta} &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\rho u}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u) &= \\
\left[\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right] + \mu\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(J\left(\gamma\frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right)\right]&,\\
\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\rho u}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v) &= \\
\left[\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right] + \mu\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(J\left(\gamma\frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right)\right]&,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

onde ξ e η, são as coordenadas generalizadas e os termos $\tau, \alpha, \beta, \gamma, J, U, V$ são termos relacionados a métrica de transformação.

3 Conclusões

A partir de simulações numéricas do sistema (2), os campos de velocidades hidrodinâmicos serão utilizados nas equações de transporte e reação para descrever a dinâmica de concentração dos poluentes no lago.

Referências

[1] M. M. D. Aguilera. *La economía de las ciénagas del Caribe colombiano*. Banco de la República, Bogotá, 2011.

[2] A. N. D. Barba. *Estudo e Implementação de Esquema Upwind na Resolução de um Modelo de Dinâmica dos Fluidos Computacional em Coordenadas Generalizadas*. Dissertação , UEL, 2015.