Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Polinômios, Raios Laser e Tartarugas

Roney Andrade da Silva[1]
UFU, Uberlândia, MG
Germano Abud[2]
FAMAT/UFU, Uberlândia, MG

Existem vários aspectos relacionados ao estudo de funções polinomiais. O processo de encontrar raízes polinomiais é um dos mais populares. A fórmula de Bháskara é um método famoso e bem conhecido, entretanto sua aplicação se resume à polinômios de segundo grau. Dentre os diferentes métodos inventados discutiremos o "*Método das Tartarugas e Raios Laser*".

O primeiro a descrevê-lo desta maneira, em analogia com tartarugas, foi o matemático Hull (2011), porém a autoria pertence ao engenheiro austríaco Eduard Lill que, em 1867, descreve uma maneira geométrica (e elegante, diga-se de passagem) para se encontrar as raízes reais de um polinômio de grau 2 ou superior [3]. Margherita Piazzola Beloch (1936), foi uma matemática italiana que, na tentativa de resolver equações cúbicas, introduziu uma operação conhecida atualmente como *dobradura de Beloch*. O golpe de mestre de Beloch foi perceber que o método de Lill, no caso cúbico, é apenas uma aplicação de seu *quadrado de Beloch*. Em [1] podemos encontrar mais detalhes e referências sobre este assunto.

Considere uma função polinomial qualquer $f(x)$, com grau n, na forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$.

O método de Lill consiste em obter geometricamente, caso exista, uma raiz real de $f(x)$, a partir do traçado de uma poligonal baseada nos coeficientes de $f(x)$.

Para exemplificar o método de Lill, vamos considerar o polinômio $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + 5x + 2$. Nosso objetivo é encontrar uma raiz real de $f(x)$, caso ela exista. Imagine uma tartaruga situada na origem O do plano cartesiano, olhando na direção positiva do eixo Ox.

1. A tartaruga caminha uma distância igual a $|a_3|$: a partir do ponto O traçamos um segmento OA_3, orientado no sentido positivo do eixo Ox, com comprimento $|OA_3| = |a_3| = 4$.

2. A partir do ponto A_3 a tartaruga gira 90°, no sentido anti-horário, e caminha uma distância igual a $|a_2|$: traçamos um segmento vertical A_3A_2, com comprimento $|A_3A_2| = |a_2| = 4$.

3. A partir do ponto A_2 a tartaruga gira 90°, no sentido anti-horário, e caminha uma distância igual a $|a_1|$: traçamos um segmento horizontal A_2A_1, com comprimento $|A_2A_1| = |a_1| = 5$.

4. A partir do ponto A_1 a tartaruga gira 90°, no sentido anti-horário, e caminha uma distância igual a $|a_0|$: traçamos um segmento vertical A_1A_0, com comprimento $|A_1A_0| = |a_0| = 2$.

5. A tartaruga finalizou seu percurso. Nos posicionamos no ponto O e "acertamos" a tartaruga no ponto A_0 da seguinte maneira: atiramos com um raio laser que sempre é ricocheteado em uma parede com um ângulo de 90°. O raio deve ricochetear nas "paredes" de comprimentos $|a_2|$ e $|a_1|$, e acertar a tartaruga no ponto A_0.

[1]roney.andrade@ufu.br
[2]germano.abud@ufu.br

Afirmação. *Se θ é o ângulo que o nosso raio laser faz com o segmento OA_3, então $x = -\tan\theta$ é uma raiz de $f(x)$.*

A demonstração deste fato é de fácil compreensão e pode ser encontrada em [2] ou [1]. Na Figura 1 ilustramos o método de Lill para o exemplo acima.

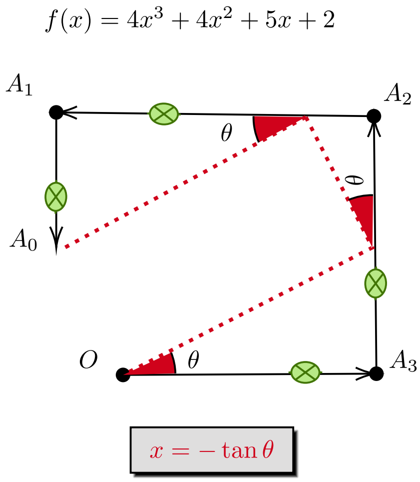

Figura 1: Poligonal de Lill para $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + 5x + 2$. A raiz é $x = -\tan\theta$.

Nos casos em que algum coeficiente de $f(x)$ é negativo, a tartaruga anda para trás e, nesta parte do trajeto da tartaruga, consideramos o comprimento "negativo". Caso algum coeficiente se anule, a tartaruga gira 90°, mas caminha uma distância nula.

O método de Lill é incrível e fica ainda melhor. O trajeto do raio laser é semelhante (no sentido geométrico) ao trajeto da tartaruga associado ao polinômio obtido de $f(x)$, quando extraímos o fator $(x + \tan\theta)$. Por exemplo, o polinômio $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x^2+3x+2)$ possui três raízes reais e cada uma corresponde a um ângulo θ diferente para se atirar na tartaruga. Se escolhermos o ângulo que dá a raiz $x = 3$, a trajetória do raio laser será uma rotação dilatada da trajetória da tartaruga para o polinômio $x^2 + 3x + 2$.

Com este trabalho percebemos a estreita relação entre a Álgebra e a Geometria. Pretendemos nos aprofundar um pouco mais nos estudos sobre o método de Lill e as dobraduras de Beloch, com ênfase em suas belíssimas aplicações.

Agradeço ao PET Matemática da UFU, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Garcia, R. e Silva, K. *Equações do terceiro grau e dobraduras de Beloch.* Revista da Olimpíada - IME - UFG, n 14, páginas 21-60, 2019.

[2] Hull, T.C. *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill.* The American Mathematical Monthly 118.4, pages 307-315, 2011.

[3] Lill, E. *Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d?un instrument inventé dans ce but.* Nouv. Annales Math. Ser. 2, des pages 359-362, 1867.