

Investigação Numérica da Condição de Admissibilidade da *Wavelet* de Morse

Pedro Marcos Mossulin Ferreira¹

Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, SP.

Luciano Aparecido Magrini²

Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP.

Margarete Oliveira Domingues³

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, SP.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo numérico da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse a partir dos parâmetros que controlam seu comportamento nos domínios do tempo e da frequência. A *wavelet* $\Psi_{\beta,\gamma}(\omega)$ de Morse é definida em frequência pela equação:

$$\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = U(\omega) a_{\beta,\gamma} \omega^\beta e^{-\omega^\gamma}, \quad (1)$$

em que $U(\omega)$ é a função passo unitário, β e γ são parâmetros reais positivos e $a_{\beta,\gamma}$ é uma constante de normalização [1,2]. A escolha da *wavelet* de Morse como objeto de estudo baseia-se em (a) sua capacidade de englobar outras famílias de funções *wavelet* como as de Cauchy e as relacionadas com as derivadas de Gaussianas, (b) sua analiticidade [1,2] e (c) no fato de que recentemente ela vem sendo aplicada na investigação da sincronização em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas [3]. Além disso, o conhecimento do valor numérico da condição de admissibilidade de uma função *wavelet* é fundamental nas aplicações que envolvem a transformada *wavelet* inversa como a remoção de ruídos ou aproximação de um sinal utilizando apenas sub-bandas de energia significativa. A condição de admissibilidade para a *wavelet* de Morse é definida pela equação [1]:

$$\zeta_\psi(\beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_{\beta,\gamma}(\omega)|}{|\omega|} d\omega$$

No que diz respeito a metodologia utilizada desenvolveram-se dois estudos acerca da condição de admissibilidade $\zeta_\psi(\beta, \gamma)$. No primeiro, β foi tomado fixo no conjunto $A = \{3, 10, 20, 50\}$ e γ variou no intervalo real $I =]0, 50]$. No segundo, fez-se γ fixo em A e β variou em I . A escolha dos valores pertencentes ao conjunto A deu-se com o objetivo de investigar se o incremento do parâmetro fixado influencia no comportamento da variação da condição de admissibilidade como função do parâmetro não fixado. O resultado é apresentado na Figura (1).

No painel superior vê-se em (A) comportamento da condição de admissibilidade com β no conjunto em A e γ variando em I com destaque para o valor numérico de $\zeta_\psi(3, 20)$ cuja correspondente *wavelet* de Morse está indicada em (B) com variável t não dimensional. No painel inferior tem-se o análogo do painel superior mas para o caso em que γ está fixo e β varia em I . Destacou-se o valor $\zeta_\psi(20, 3)$ pois neste caso a correspondente *wavelet* tem resposta em frequência gaussiana (curtose nula) e é especialmente adequada para a análise de sinais altamente oscilatórios uma vez que sua largura de banda é suficientemente estreita [1,2]. Já a escolha em se destacar $\zeta_\psi(3, 20)$ tem

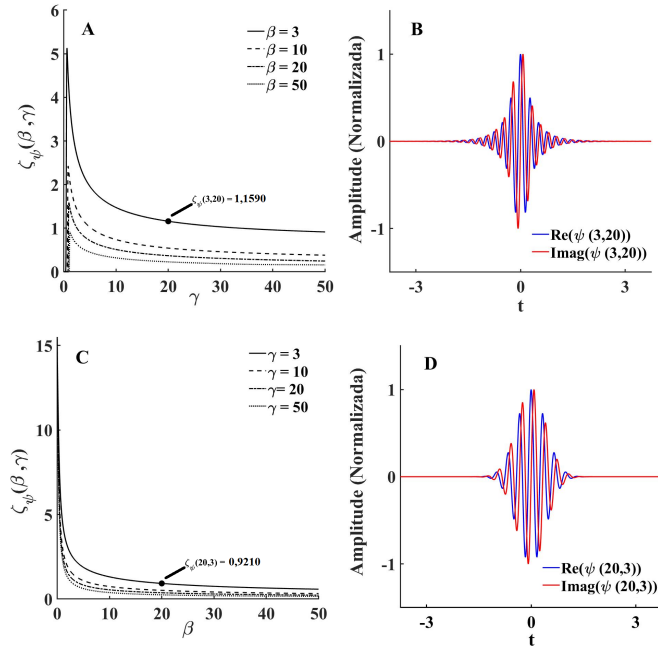
¹mossulin.ferreira@aluno.ifsp.edu.br

²magrini@ifsp.edu.br

³margarete.domingues@inpe.br

o intuito de mostrar que a comutação dos valores dos parâmetros implica em um valor diferente para a condição de admissibilidade. Nos dois casos observa-se que a condição de admissibilidade tende exponencialmente a zero quando o parâmetro tomado variável tende ao infinito.

Figura 1: Condição de Admissibilidade $\zeta_\psi(\beta, \gamma)$ com (A) β fixado e (C) γ fixado. Painéis B e D: *wavelets* de Morse cujo valor de $\zeta_\psi(\beta, \gamma)$ estão destacados em A e C, respectivamente.



Os resultados obtidos via simulações numéricas indicam que a condição de admissibilidade tende a zero independentemente do parâmetro que é fixado ainda que o decaimento à zero seja mais rápido quando se fixa γ . As maiores taxas de decaimento exponencial de $\zeta_\psi(\beta, \gamma)$ são observadas para os maiores valores do parâmetro que é fixado. Além disso, valores menores de γ podem gerar *wavelets* menos interessantes para fins práticos, pois elas passam a ser muito contraídas o que dificulta a análise em pequenas escalas.

Agradecimento

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro via PIBIC/INPE (Edital 2020/2021).

Referências

- [1] Lilly, J. M., Olhede, S. C. On the analytic wavelet transform, *IEEE Transactions on Information Theory*, 56:4135–4156, 2010. DOI:10.1109/TIT.2010.2050935.
- [2] Lilly, J. M., Olhede, S. C. Higher-order properties of analytic wavelets, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57:146–160, 2009. DOI:10.1109/TSP.2008.2007607.
- [3] Magrini, L. A., Domingues, M. O., Macau, E. E. N., Kiss, I. Z. Extraction of slow and fast dynamics of multiple time scale systems using wavelet techniques, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30 : 063139, 2020. DOI: 10.1063/5.0004719