Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Teorema da amostragem na reconstrução de sinais de tempo contínuo

Humberto Gimenes Macedo[1]
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP), São José dos Campos, SP
Virginia Klausner de Oliveira[2]
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP), São José dos Campos, SP
Anna Karina Fontes Gomes[3]
Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Cubatão, SP

O teorema da amostragem fornece as condições suficientes para a reconstrução adequada de um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras tomadas uniformemente a uma dada taxa de amostragem. Ele desempenha um papel importante na transição de sinais de tempo contínuo para sinais de tempo discreto, como ocorre no contexto de modulação de pulso em sistemas de comunicação digital [1,2]. Tendo em vista a sua importância, o propósito desta discussão é descrevê-lo matematicamente e apresentar um exemplo simples de aplicação.

Seja $g(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, em que $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ são os espaços das funções absolutamente integráveis e de energia finita, respectivamente. Suponha que o espectro de $g(t)$ seja limitado em banda a W Hz, isto é, que $G(f) = 0$ para $|f| \geq W$, em que $G(f)$ é a sua transformada de Fourier contínua. Então, amostrando este sinal com um período de amostragem T_s, obtém-se uma sequência infinita de amostras uniformes $\{g(nT_s)\}$, em que $n \in \mathbb{Z}$. Seja Ш_{T_s} uma função periódica de período T_s definida por

$$\text{Ш}_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \tag{1}$$

em que δ denota a função delta de Dirac. A função Ш_{T_s} é um trem de impulsos periódico que recebe o nome de *função de amostragem*. Utilizando a propriedade da transformada de Fourier para sinais periódicos, verifica-se que a transformada de Fourier da equação (1) é dada por

$$\hat{\text{Ш}}_{f_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s), \tag{2}$$

em que $f_s = 1/T_s$ é a taxa de amostragem. Seja $g_\delta(t)$ o sinal obtido como resultado do processo de amostragem. Então, para obter uma expressão analítica que o represente, é suficiente multiplicar a função de amostragem definida na equação (1) pelo sinal $g(t)$, de modo que

$$g_\delta(t) = (\text{Ш}_{T_s} g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s), \tag{3}$$

em que utilizou-se da propriedade $g(t)\delta(t - nT_s) = g(nT_s)\delta(t - nT_s)$ na última igualdade, uma vez que $g(t)$ é um sinal contínuo. Por meio da propriedade de multiplicação da transformada de Fourier e da equação (2), pode-se obter a transformada de Fourier da equação (3), isto é,

$$G_\delta(f) = (G * \hat{\text{Ш}}_{f_s})(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f) * \delta(f - nf_s) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s), \tag{4}$$

[1]gimeneshumberto@outlook.com
[2]viklausner@gmail.com
[3]anna.gomes@ifsp.edu.br

onde o operador $*$ denota a operação de convolução. Note que a equação (4) indica que o processo de amostragem uniforme de $g(t)$ no domínio do tempo resulta na periodização de sua transformada de Fourier no domínio da frequência [2]. Além disso, esta equação é a essência para a reconstrução do sinal original $g(t)$ a partir de suas amostras, pois ela só é possível quando não houver sobreposição das "cópias" de $G(f)$, ou seja, quando $f_s - W > W$ ou $f_s > 2W$, em que $2W$ é chamada de *taxa de Nyquist* [2]. Considerando $f_s > 2W$ e sabendo que $g(t)$ é limitado em banda, vem da equação (4) que

$$G_\delta(f) = f_s G(f) \implies G(f) = T_s G_\delta(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \exp(-j2\pi f n T_s), \quad |f| < W, \tag{5}$$

em que j é a unidade imaginária. Na obtenção da equação (5), utilizou-se da última igualdade na equação (3) para obter $G_\delta(f)$ em uma forma alternativa, mas equivalente. Por fim, para obter o sinal original $g(t)$ basta aplicar a transformada inversa de Fourier na equação (5). De fato,

$$g(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \int_{-W}^{W} \exp\left[j2\pi f\left(t - nT_s\right)\right] df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

em que $\mathrm{sinc}\,(\theta) = \mathrm{sen}\,(\pi\theta)/(\pi\theta)$ é a definição da função sinc normalizada. A equação (6) é chamada de *fórmula de interpolação* e permite reconstruir $g(t)$ a partir de sua sequência de amostras uniformes $\{g(nT_s)\}$ [2]. Em suma, o teorema da amostragem afirma que um sinal como $g(t)$ só pode ser reconstruído por meio da equação (6) quando $f_s > 2W$. A fim de ilustrá-lo, implementou-se a equação (6) em MATLAB (MATrix LABoraty) para o sinal $g(t) = \cos(2\pi 10t)$, em que $W = 10\,\mathrm{Hz}$. A Figura 1 mostra a amostragem deste sinal e a sua reconstrução nos casos em que $f_s = 3W/2$ e $f_s = 4W$.

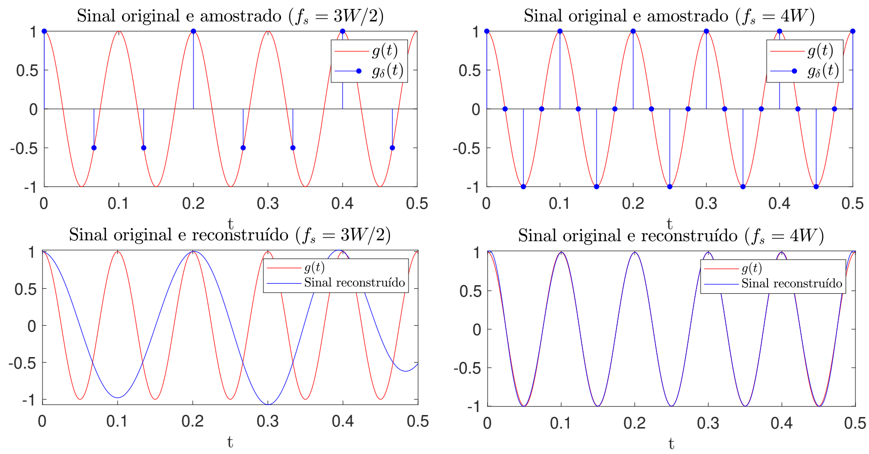

Figura 1: Aplicação do teorema da amostragem para um sinal senoidal com frequência $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Nota-se que a equação (6) não reconstrói o sinal original quando $f_s < 2W$.

Referências

[1] Oppenheim, Alan V. e Willsky, Alan S. *Sinais e Sistemas, 2a. edição.* Pearson, São Paulo, 2010.

[2] Simon, H. e Moher, M. *Introdução aos Sistemas de Comunicação, 2a. edição.* Bookman, Porto Alegre, 2008.