Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de Métodos de Resolução das Equações de Yule-Walker em Análise Espectral por Modelo Autorregressivo (AR)

Jian Lucas Brito Veras [1]
ITA, São José dos Campos, SP
Rina Chen Carvalho [2]
ITA, São José dos Campos, SP

Uma área estudada em processamento de sinais é a identificação de frequências correspondentes a periodicidades, chamada de estimativa de densidade espectral, a qual é de grande importância para as áreas de eletrônica e comunicações.

Um sinal aleatório $x(n)$, com ruído branco $w(n)$ gaussiano - distribuição normal de média zero - pode ser ajustado a um modelo autorregressivo (AR) de ordem N com parâmetros $a(k)$, conforme equação 1.

$$x(n) = w(n) - \sum_{k=1}^{N} a(k)\, x(n-k) \tag{1}$$

Extraindo o valor esperado da expressão anterior, em forma matricial, tem-se o sistema de equações de Yule-Walker, em 2, em que $r_{xx}(k)$ corresponde à autocovariância do sinal.

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(1-N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(2-N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{xx}(1) \\ -r_{xx}(2) \\ \vdots \\ -r_{xx}(N) \end{bmatrix} \tag{2}$$

A partir da variância do ruído, σ^2, é possível estimar a densidade espectral, conforme 3. [3], [6]

$$S(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^{N} a(k)\, e^{-i\omega k}\right|^2} \tag{3}$$

Neste trabalho, foi gerado um sinal aleatório correspondente a um modelo autorregressivo de ordem 4 - AR(4) - por meio da filtragem de 200 amostras de ruído branco.

Os métodos utilizados para estimativa de densidade espectral consistiram em: aplicação da função `aryule`, já implementada nas ferramentas de processamento de sinal da linguagem MATLAB ®; aplicação do Algoritmo de Bareiss [7], dado que o sistema linear é composto por uma matriz de Toeplitz (diagonais constantes); e aplicação direta da operação de resolução de sistema linear da linguagem MATLAB®, `mldivide` (operador "\").

Todos os métodos resultaram em uma estimativa de densidade espectral satisfatória para o sinal estudado, apresentados na figura 1.

[1]jian.veras@ga.ita.br
[2]rina.carvalho@ga.ita.br

Comparando os métodos utilizados, a função `aryule` apresentou maior precisão, porém suscetível a erros para matrizes mal-condicionadas. O algoritmo de Bareiss, de igual complexidade, apresentou maior estabilidade. O operador `mldivide` apresentou maior complexidade. [1], [2], [4], [5]

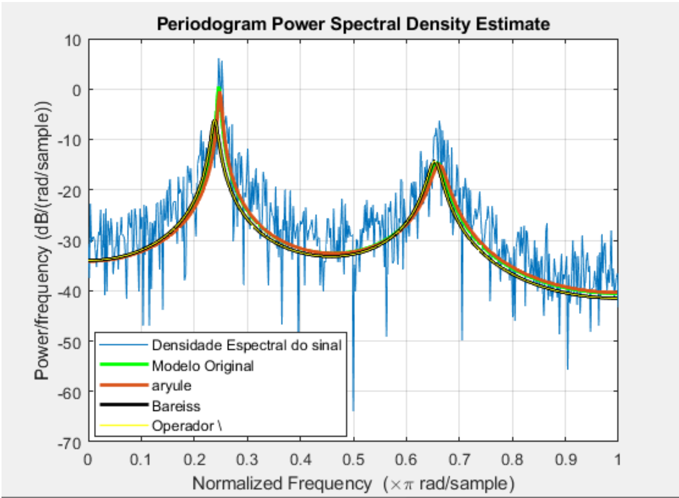

Figura 1: Estimativas de densidade espectral para cada método.

Agradecimentos

À professora Tiara Martini, da Divisão de Matemática do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, por ter ministrado a disciplina de Álgebra Linear Computacional com excelência, preocupando-se com o aprendizado do aluno e com a qualidade do ensino.

Referências

[1] Bojanczyk, A. W., Brent, R. P., De Hoog, F. R. and Sweet, D. R. On the stability of the Bareiss and related Toeplitz factorization algorithms, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 16:14-16, 1993. DOI: 10.1137/S0895479891221563.

[2] Durbin, J. The fitting of time-series in models, *Review of the International Statistical Institute*, 28(3):233-244, 1960. DOI: 10.2307/1401322.

[3] Hogben, L. *Handbook of Linear Algebra, 1st edition.* Chapman and Hall/CRC, 2006.

[4] Krishna, H. *Teoplitz Matrices: Algebra and Algorithms.* Syracuse University, Syracuse, 1990.

[5] Menon, D. and Krishnamoorthy, A. Matrix inversion using Cholesky decomposition, *2013 Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA)*, pages 70-72, 2013.

[6] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. and Buck, J. R. *Disrete-Time Signal Processing, 2nd edition.* Prentice Hall, New Jersey, 1999.

[7] Sweet, D. R. *Numerical methods for Toeplitz matrices.* Tese de Doutorado, University of Adelaide, Adelaide, 1982.