

Modelo de Gompertz aplicado a biodigestores

Lucas M. Paim¹

FCF/UNESP, Araraquara, SP

Ricardo de Sá Teles²

UTFPR, Londrina, PR

Sidineia Barrozo³

IQ/UNESP, Araraquara, SP

Um biodigestor é um recipiente fechado, cujo objetivo é realizar fermentação anaeróbia de matéria orgânica, produzindo gases, principalmente o metano, que possui alta capacidade energética [3]. Dessa forma, modelos matemáticos podem ser úteis para descrever e otimizar a produção de biogás em biodigestores. Assim, o objetivo deste trabalho é estudar o modelo matemático proposto por Bassanezi e Ferreira [1], considerando o modelo de Gompertz para a dinâmica de crescimento de bactérias no interior do biodigestor.

Embora um biodigestor seja um sistema altamente complexo, cuja eficiência depende de muitos fatores, como quantidade de bactérias, temperatura, pH, umidade, entre outros, o modelo estudado neste trabalho considera apenas a produção de biogás relacionada com a população de bactérias no biodigestor, supondo que se façam retiradas constantes de biogás ao longo do processo. O modelo é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, onde o crescimento de bactérias se dá segundo o modelo de Gompertz, conforme equação (1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - bx \ln(x) - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - \beta \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

onde α , b , p , k e β são constantes positivas, t é a variável que representa o tempo, x é a quantidade de bactérias produtoras de biogás, y é a quantidade de gás produzido no interior do biodigestor, $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ são os valores iniciais de x e y respectivamente, α e k estão relacionadas ao crescimento bacteriano e produção de biogás, p e b são os fatores inibitórios do crescimento bacteriano e β descreve a retirada constante de biogás no interior do biodigestor.

O modelo proposto possui uma única solução de equilíbrio viável ($x > 0, y > 0$), dada por $\left(\frac{\beta}{k}, \frac{\alpha}{p} - \frac{b}{p} \ln \frac{\beta}{k}\right)$ com $\alpha \geq b \ln \frac{\beta}{k}$ se $\beta > k$, que é assintoticamente estável, sendo um nó se $b \geq 2\sqrt{p\beta}$ ou uma espiral, caso contrário. O plano de fase, que permite a visualização desta convergência, foi construído com o programa de Nester [2] e é apresentado na Figura 1 b).

A solução numérica do sistema foi realizada usando o *software* SciLab, que possibilitou a realização de várias simulações para compreender a influência dos parâmetros na produção do biogás. Como ponto de partida, foram utilizados os valores sugeridos na referência [1] para os parâmetros, visto que Bassanezi e Ferreira Jr. analisaram modelos semelhantes. Assim, foram considerados os

¹l.paim@unesp.br

²ricardoteles@utfpr.edu.br

³s.barrozo@unesp.br

seguintes valores: $\alpha = 2$, $b = 0,01$, $p = 0,001$, $k = 1$, $\beta = 0,5$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 0$ e na sequência, foram realizadas alterações nesses valores a fim de observar a influência de cada um deles na dinâmica do modelo.

Foi possível observar que para maximizar a produção de biogás deve-se aumentar os valores de α , k e x_0 , e diminuir os valores de b e p , assim como, para minimizar o tempo de produção da quantidade máxima de gás, os parâmetros que devem ser aumentados são α , k e x_0 , e deve-se diminuir o valor de b . A Figura 1 mostra um exemplo destas simulações.

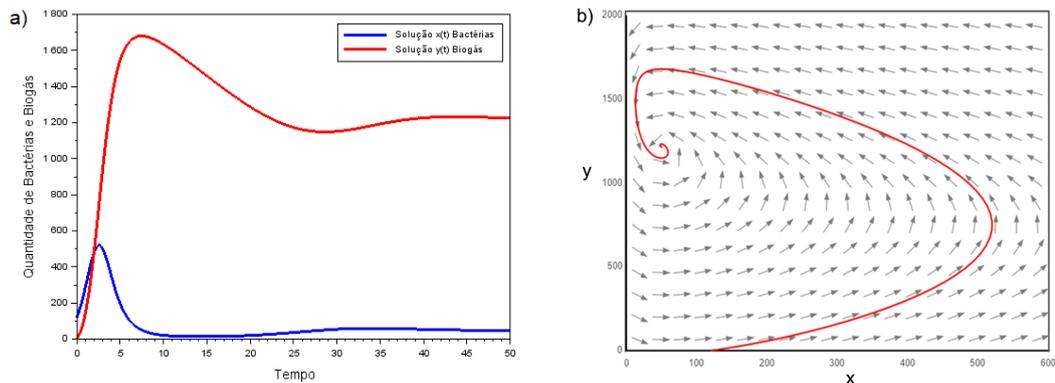


Figura 1: a) Gráfico das soluções $x(t)$ e $y(t)$; b) plano de fase do sistema (1) quando $\alpha = 2$, $b = 0,2$, $p = 0,001$, $k = 1$, $\beta = 50$, $x_0 = 120$ e $y_0 = 0$.

A análise do modelo mostrou que ele se comporta de modo bastante semelhante aos modelos sugeridos em [1], o que indica que a função de Gompertz foi adequada para representar a dinâmica populacional de bactérias. Para saber se ela apresenta vantagens sobre as outras estudadas, é necessário estudos mais aprofundados e, preferencialmente, com dados reais, o que não foi possível no momento.

Agradecimentos

À FAPESP pela bolsa de iniciação de científica (Processo: 2019/23485-6).

Referências

- [1] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações, 1a. edição*. Harbra, São Paulo, 1988.
- [2] Nester, D. Slope and Direction Fields. *Bluffton University*. <https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html?>. Acesso em 6 de fevereiro de 2021.
- [3] Oro, N., Sausen, A. e Sausen, P. Modelagem, estabilidade e simulação do processo de produção de biogás num biodigestor urbano. *CIATEC-UPF*, 9:25-35, 2017. DOI: 10.5335/ciatec.v9i1.6603.