Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Estudo sobre coloração total das potências de ciclo

Sérgio Fusquino[1]
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil
Mauro Nigro[2]
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil
Diana Sasaki[3]
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

## 1 Introdução

Um grafo conexo $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de vértices $V$ conectados por um conjunto de arestas $A$. Os problemas de coloração em grafos modelam diversas situações de conflitos reais. Uma coloração total de um grafo $G$ é uma função $\varphi$ entre os conjuntos de vértices $V$ e o de arestas $A$ com um conjunto $C$ de cores, tal que a associação de cores às arestas e aos vértices de $G$ é feita de maneira que cada par de vértices adjacentes e cada par de arestas adjacentes tenham sempre cores distintas e, além disso, cada vértice deve ter cor distinta das cores das arestas que nele incidem. Se $\varphi : V \cup E \to C$ é uma coloração total de $G$ e $|C| = k$, então dizemos que $G$ é $k$-total-colorível e $\varphi$ é uma $k$-coloração total. A menor cardinalidade de $C$ para o qual existe uma coloração total em $G$ é o número cromático total de $G$, denotado $\chi''(G)$.

Conjecturada em 1965 independentemente por Vizing e Behzad, a bem conhecida Conjectura da Coloração Total afirma que para todo grafo $G$, $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de $G$. Se $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, $G$ é dito Tipo 1. Se $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, $G$ é dito Tipo 2. Esta conjectura está em aberto há mais de 50 anos e é o foco deste trabalho. Se encontrarmos primeiramente uma $(\Delta(G) + 2)$-coloração total não significa que o grafo é Tipo 2, pois pode haver uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração total ainda não encontrada. É necessário provar que não existe essa $(\Delta(G) + 1)$-coloração total para se provar que um grafo é Tipo 2.

Com base nas técnicas de coloração apresentadas em Campos [1], apresentamos uma $(\Delta + 1)$-coloração total para o grafo potência de ciclo $C_{19}^5$, provando assim que este grafo é Tipo 1.

Um grafo potência de ciclo é denotado $C_n^k$ e consiste em um conjunto de vértices $V(C_n^k) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ e arestas $E(C_n^k) = E^1 \cup ... \cup E^k$, onde $E^i = \left\{v_j v_{(j+i) \mod n} \mid 0 \leq j \leq n-1\right\}$, ou seja, o grafo $C_n^k$ consiste em um ciclo com $n$ vértices com mais arestas entre pares de vértices de distância até $k$.

## 2 Resultado

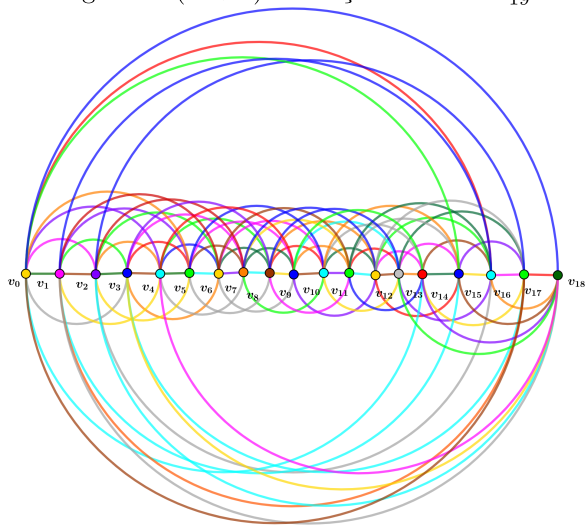
**Teorema 2.1.** *O grafo potência de ciclo $C_{19}^5$ é Tipo 1.*

[1]sergio.fusquino@gmail.com
[2]mauro.nigro@pos.ime.uerj.br
[3]diana.sasaki@ime.uerj.br

*Demonstração.* Apresentamos uma $(\Delta+1)$-coloração total do grafo $C_{19}^5$ na Figura 1 e inserimos abaixo uma tabela com a legenda da coloração para facilitar a verificação. Inciada por uma coloração de vértices harmônica e com base em propriedades de tamanho independente de arestas das potências de ciclos apresentadas em [1], aplicamos a técnica de começar colorindo cada classe de cor com o maior número possível de elementos, de forma a tentar utilizar o menor número de cores possível na coloração. □

Figura 1: $(\Delta+1)$-coloração total do $C_{19}^5$



| $\Delta$+1 cores | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $v_9$ | $v_{10}$ | $v_{11}$ | $v_{12}$ | $v_{13}$ | $v_{14}$ | $v_{15}$ | $v_{16}$ | $v_{17}$ | $v_{18}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Amarelo | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | A |
| Azul | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A |
| Vermelho | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A |
| Verde claro | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A |
| Laranja | A | A | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A |
| Lilás | A | A | V | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A |
| Rosa | A | V | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A |
| Verde escuro | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | V |
| Cinza | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A |
| Ciano | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | V | A | A |
| Marrom | A | A | A | A | A | A | A | A | V | A | A | A | A | A | A | A | A | A | A |

**Legenda:**
**V - Cor do vértice**
**A - Cor da aresta**

A Conjectura da Coloração Total foi verificada para todas as potências de ciclo com número par de vértices [1]. Dessa forma, restringimos o nosso estudo à uma potência de ciclo de ordem ímpar e conseguimos classificá-la como Tipo 1, verificando então a conjectura pra este grafo.

## Referências

[1] Campos, C.N., O Problema da Coloração Total em Classes de Grafos, Tese de Doutorado, Universidade Estadual da Campinas, São Paulo, 2006.