

# Equação de difusão revisitada

Renata Piva Gomes<sup>1</sup>

Edmundo Capelas de Oliveira<sup>2</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

## 1 Introdução

Ao estudarmos as equações diferenciais parciais (EDP) de segunda ordem, no caso em que o discriminante é nulo, temos as equações diferenciais parciais do tipo parabólico associadas ao problema de difusão [2]. Neste trabalho, vamos nos concentrar em uma particular aplicação da equação de difusão, a chamada equação de difusão que descreve o fenômeno de sedimentação, especificamente, pelo que atende pelo nome de taxa de sedimentação de eritrócitos, versão livre do termo em inglês, erythrocyte sedimentation rate (ESR).

Além de apresentarmos as notações e conceitos básicos em relação à classificação de uma EDP, efetuamos uma revisão bibliográfica do problema associado à ESR, chamando a atenção para as condições iniciais e de contorno. Confrontamos a solução analítica obtida por Sharma et al. [4] com dados experimentais, conforme discutido por Vanterler [5], a fim de propor um modelo fracionário.

## 2 Taxa de sedimentação de eritrócitos

O ESR é um exame de sangue introduzido em 1897, pelo médico Polonês E. F. Biernacki o qual mede a rapidez com que os eritrócitos (as hemácias ou glóbulos vermelhos) se sedimentam no fundo de um tubo de ensaio. Esse exame pode ser utilizado no monitoramento de doenças como artrite reumatóide, anemia falciforme, AIDS, tuberculose, junto com outros testes para evitar falso-positivo ou falso-negativo dada sua falta de especificidade [3, 5]. Recentemente, foram propostos estudos que associaram alterações no ESR com casos mais severos do COVID-19 [1]. Sendo assim, temos que, apesar de não ser um teste conclusivo que possibilite o diagnóstico de uma doença, o ESR tem a sua importância no fato de permitir a verificação da atividade da doença.

## 3 Equação de difusão e os modelos matemáticos

Como o fenômeno de sedimentação é um fenômeno de transporte, podemos descrevê-lo pela equação de difusão homogênea:

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) \quad (1)$$

onde  $C(x, t)$  é a concentração de soluto num ponto  $x$ , num determinado instante  $t$ ;  $\mathcal{D}$  é o coeficiente de difusão e  $\sigma$  denota a resistência do fluido.

---

<sup>1</sup>renata.piva.gomes@gmail.com

<sup>2</sup>capelas@unicamp.br

No modelo de Sharma [4] é apresentado o estudo da concentração de nutrientes considerando a membrana semi-impermeável, isto é, considerando a troca de nutrientes com o meio, afim de torná-lo mais realista. Esse modelo é dado pela equação não homogênea:

$$D_L \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \phi(x, t) \quad (2)$$

sendo  $U = -\sigma$  e  $\phi(x, t)$  a função que descreve a taxa de transferência de nutrientes.

No modelo proposto por Vanterler [5] e validado em [6], foi utilizada a derivada fracionária no sentido de Caputo na parte temporal, cuja equação diferencial que modela o fenômeno é:

$$D_L D_x^2 C(x, t) - D_t^\mu C(x, t) = \exp(-(at + bx)), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3)$$

onde  $0 < \mu \leq 1$ , bem como é recuperada a solução do modelo proposto por Sharma et al. [4], no caso em que  $\mu \rightarrow 1$ .

## 4 Conclusões

Com esse estudo pretendemos, além de recuperar os resultados anteriores, propor uma derivada fracionária na parte espacial junto à derivada fracionária na parte temporal, a fim de confrontar os resultados com os dados experimentais, no intuito de deixar o modelo mais próximo do real.

## Agradecimentos

RPG agradece ao apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

## Referências

- [1] Lopic, I., Rogic, D. and Plebani, M. Erythrocyte sedimentation rate is associated with severe coronavirus disease 2019 (COVID-19): a pooled analysis, *Clin Chem Lab Med*, 58(7): 1146–1148, 2020. DOI: 10.1515/ccm-2020-0620.
- [2] Oliveira, E. C. de. and Maiorino, J. E. *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada, 3a. edição*. Editora da Unicamp, Campinas, 2010.
- [3] Saadeh, C. The erythrocyte sedimentation rate: old and new clinical applications, *Southern Medical Journal*, volume 91, 219–226, 1998. DOI: to appear.
- [4] Sharma, G. C., Jain, M. and Saral, R. N. A mathematical model for concentration of blood affecting erythrocyte sedimentation, *Comp. Biol. Med.*, no.1,1–7, 1996. DOI: 10.1016/0010-4825(95)00038-0.
- [5] Sousa, J.V. da C. Equação de difusão tempo-fracionária (Taxa de sedimentação de eritrócitos), Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, 2018.
- [6] Sousa, J.V. da C., dos Santos, M. N. N., Magna, L. A. and De Oliveira, E. C. Validation of a fractional model for erythrocyte sedimentation rate, *Computational and Applied Mathematics*, volume 37, 6903–6919, 2018. DOI: 10.1007/s40314-018-0717-0.