

Grupo de permutações e a resolução de um problema envolvendo o jogo do 15

Victor Cruz Borges¹

FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG

Cícero Carvalho²

FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG

A teoria de grupos é uma importante área da Álgebra, e que também encontra aplicações em diversos problemas de modelagem matemática. Nesse trabalho pretendemos dar uma breve introdução a essa teoria, nos concentrando em alguns resultados da importante classe formada pelos grupos de permutações. Em seguida faremos uma aplicação dos resultados para resolver um famoso desafio envolvendo o assim chamado “jogo do 15”.

Durante muitos anos acreditou-se que o jogo do 15 (15-puzzle, em inglês) havia sido inventado pelo famoso enxadrista, criador de problemas de xadrez e de quebra-cabeças americano Samuel Loyd (1841-1911), que alegou em 1891 ser o inventor desse jogo. Em 2006 J. Slocum e D. Sonneveld mostraram que na verdade o inventor desse jogo foi Noyes Palmer Chapman, que inclusive tentou patentear-lo em 1880, quando o jogo se tornou uma sensação nos Estados Unidos (v. [2]). O jogo consiste de um tabuleiro com 15 peças que devem ser embaralhadas e trazidas de volta à configuração original. As peças podem ser fixas no quadro do jogo, ou soltas (veja já figura abaixo).



Figura 1: À esquerda um jogo com peças fixas na moldura, e à direita um com peças soltas.

Por volta de 1890 Loyd ofereceu a US\$1.000,00 para quem conseguisse trazer as peças para a configuração original partindo de uma posição que era a mesma da original, exceto pela troca de posições entre as peças de números 14 e 15.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 2: Configuração de partida do problema proposto por Samuel Loyd.

¹victor.cruz@ufu.br

²cicero@ufu.br

Nesse trabalho vamos mostrar que não há como passar dessa posição inicial para a configuração original, seguindo os artigos [1] e [3].

Depois de apresentar conceitos básicos de teoria de grupos, vamos passar ao estudo de grupos de permutações. Definiremos então o que são ciclos de permutações, e como multiplicá-los. Mostraremos a seguir que toda permutação pode ser escrita com um produto de ciclos. Mais ainda, vamos mostrar que toda permutação pode ser escrita como um produto de transposições, que são ciclos de comprimento 2. Dada uma permutação, sua expressão como produto de transposições pode não ser único, no entanto, um importante resultado que apresentaremos afirma que a paridade do número de elementos no produto é um invariante da permutação. Assim, se uma permutação se escreve como um produto de um número ímpar (respectivamente, par) de transposições, qualquer outro produto de transposições produzindo aquela permutação terá um número ímpar (respectivamente, par) de transposições.

Cada movimento no jogo do 15 pode ser encarado como produzindo uma permutação de 16 elementos (que são as 15 peças e mais o espaço livre). Como uma aplicação do teorema da constância da paridade mencionado acima, mostraremos que não é possível sair da configuração proposta por Loyd e chegar à configuração original (ou vice-versa).

Referências

- [1] Conrad, K. The Fifteen puzzle (and Rubik's cube). Expository Papers. Disponível em < <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/> >. Acessado em 02/02/2021.
- [2] Slocum, J. e Sonneveld, D. *The 15 Puzzle Book: How it Drove the World Crazy*. Slocum Puzzle Foundation, Beverly Hills, 2006.
- [3] Trapa, P. Permutations and the 15-Puzzle. Math Circle Notes, University of Utah. Disponível em < <https://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/03-04.html> >. Acessado em 02/02/2021.