Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Dinâmica pullback de Sistemas de Bresse

Ricardo de Sá Teles[1]
DAMAT/UTFPR, Londrina, PR

Resumo. Neste trabalho investigamos a dinâmica a longo prazo de um sistema de Bresse não-autônomo. Garantimos a existência e unicidade de solução e os resultados principais estabelecem a existência de atrator pullback e a semicontinuidade superior de atratores, quando se considera um parâmetro no sistema. Nós também estudamos a continuidade de atratores com respeito a um parâmetro num conjunto denso residual.

1 Introdução

Neste trabalho nós estudamos a dinâmica a longo prazo das soluções do seguinte sistema de Bresse

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi+lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + g_1(\varphi_t) + f_1(\varphi,\psi,w) &= \epsilon h_1(x,t),\\ \rho_2\varphi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi+lw) + g_2(\psi_t) + f_2(\varphi,\psi,w) &= \epsilon h_2(x,t),\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x+\psi+lw) + g_3(w_t) + f_3(\varphi,\psi,w) &= \epsilon h_3(x,t),\end{aligned} \tag{1}$$

definida em $(0,L)\times[\tau,+\infty[$, sujeita às condições de froteira de Dirichlet,

$$\varphi(0,t)=\varphi(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=w(0,t)=w(L,t)=0, \quad t\geqslant\tau, \tag{2}$$

e condição inicial (para $t=\tau$),

$$\varphi(\cdot,\tau)=\varphi_0^\tau,\ \varphi_t(\cdot,\tau)=\varphi_1^\tau,\ \psi(\cdot,\tau)=\psi_0^\tau,\ \psi_t(\cdot,\tau)=\psi_1^\tau,\ w(\cdot,\tau)=w_0^\tau,\ w(\cdot,\tau)=w_1^\tau, \tag{3}$$

onde $g_1(\varphi_t)$, $g_2(\varphi_t)$ e $g_3(\varphi_t)$ são termos de damping não linear, $f_i(\varphi,\psi,w)$, $i=1,2,3$, são forças externas e $h_i=h_i(t)$, $i=1,2$, são perturbações dependentes do tempo, o que torna o sistema não-autônomo. Sob condições bastante gerais nós garantimos que o problema (1)-(3) é bem-posto no espaço de energia

$$V = H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L),$$

equipado com a norma

$$\|(\varphi,\psi,w,\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde w)\|_V = \rho_1\|\tilde\varphi\|^2+\rho_2\|\tilde\psi\|^2+\rho_1\|\tilde w\|^2+b\|\psi_x\|^2+k\|\varphi_x+\psi+lw\|^2+k_0\|w_x-l\varphi\|^2.$$

Consideramos que f_1, f_2 e f_3 são localmente Lipschitz e do tipo gradiente. Assumimos que existe uma função de classe C^2, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla F=(f_1,f_2,f_3)$, e satisfaz as seguintes condições: existem β, $m_F\geqslant 0$ tais que

$$F(u,v,w)\geqslant -\beta(|u|^2+|v|^2+|w|^2)-m_F \quad \forall\ u,v,w\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

[1]ricardo.sa.teles@gmail.com.

e existem $p \geqslant 1$ e $C_f > 0$ tais que, para $i = 1, 2, 3$,

$$|\nabla f_i(u, v, w)| \leqslant C_f(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1}), \quad \forall\, u, v, w \,\in\, \mathbb{R}. \tag{5}$$

Em particular isso implica que existe $C_F > 0$ tal que

$$F(u, v, w) \leqslant C_F(1 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}), \quad \forall\, u, v, w \,\in\, \mathbb{R}. \tag{6}$$

Além disso, assumimos que, para todo $u, v, w \,\in\, \mathbb{R}$,

$$\nabla F(u, v, w) \cdot (u, v, w) - F(u, v, w) \geqslant -\beta(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) - m_F. \tag{7}$$

Em relação às funções damping $g_i \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, assumimos que g_i é crescente e $g_i(0) = 0$, e existem constantes $m_i, M_i > 0$ tais que

$$m_i \leqslant g_i'(s) \leqslant M_i, \quad \forall\, s \,\in\, \mathbb{R}. \tag{8}$$

Finalmente, assumimos $h_1, h_2 \,\in\, L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ e mais algumas condições sobre estas funções.

2 Resultados Principais

Teorema 2.1. *Se as hipóteses* (4)-(8) *são válidas, então o processo de evolução gerado pelo problema* (1)-(3) *admite um atrator pullback* $\mathcal{A}_\epsilon = \{\mathcal{A}_\epsilon(t)\}$ *no espaço de fase* V.

Teorema 2.2. *Sob as condições do Teorema 2.1, o atrator pullback* $\{\mathcal{A}_\epsilon\}$ *é semicontínuo superiormente quando* $\epsilon \to 0$, *isto é,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} dist_V(\mathcal{A}_\epsilon(t), \mathcal{A}_0) = 0, \quad \forall\, t \,\in\, \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde $dist_V$ *representa a semi-distância de Hausdorff em* V.

A existência de atrator global para o problema (1)-(3) quando $\epsilon = 0$ foi demonstrada em [2]. Usando um resultado recente de [1] conseguimos demonstrar o próximo Teorema.

Teorema 2.3. *Seja* $t \in \mathbb{R}$. *No contexto do Teorema 2.1 existe um conjunto denso* J *em* $[0, 1]$ *tal que* $\{\mathcal{A}_\epsilon\}$ *é contínuo com respeito a um parâmetro* $\epsilon_0 \in J$, *isto é,*

$$\lim_{\epsilon \to \epsilon_0} d_V(\mathcal{A}_\epsilon(t), \mathcal{A}_{\epsilon_0}) = 0, \quad \forall\, \epsilon_0 \,\in\, J, \tag{2}$$

onde $d_V(A, B) = \max\{dist_V(A, B), dist_V(B, A)\}$.

Referências

[1] Hoang, L. T, Olson, E. J. , Robinson, J. C. On the continuity of global attractors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143:4389–4395, 2015.

[2] Ma, T. F., Monteiro, R. N Singular limit and long-time dynamics of Bresse systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49:2468-2495, 2017.