

## Construção de aplicações de Gauss sem pontos de cúspides

C. Mendes de Jesus<sup>1</sup>  
 DM/UFJF, Juiz de Fora, MG  
 Pantaleón D. Romero<sup>2</sup>  
 DMFCT/CEU UCH, Valência-ES  
 E. Sanabria-Codesal<sup>3</sup>  
 DMA/UPV, Valência-ES

As singularidades de um aplicação de Gauss estável de uma superfície genericamente imersa no  $\mathbb{R}^3$ , no sentido de Whitney, foram descritas em [1, 8]. O conjunto singular das aplicações de Gauss estáveis é formado por  $E$  curvas parabólicas, que são curvas de pontos de dobra com pontos cúspides isolados. O conjunto regular está formado por  $V$  regiões conexas, sendo que cada uma destas componentes está composta de somente pontos elípticos ou somente pontos hiperbólicos. Cada uma das  $E$  curvas parabólicas separa uma região hiperbólica de uma região elíptica da superfície. Podemos denotar por  $V^+$  o número de regiões elípticas e por  $V^-$  o número de regiões hiperbólicas. A soma total dos gêneros das regiões elípticas será denotado por  $W^+$  e a soma total dos gêneros das regiões hiperbólicas será denotado por  $W^-$ .

Em [5] foi introduzido e estudo de grafos com pesos associados às aplicações de Gauss de superfícies fechadas e orientadas  $M$  imersas no 3-espaço. Cada um dos  $V$  componentes regulares corresponde a um vértice no grafo e cada uma das  $E$  curvas parabólicas corresponde a uma aresta no grafo. Uma aresta  $a$  do grafo é incidente a um vértice  $v$  se a curva correspondente a aresta  $a$  é bordo da região regular  $U$  correspondente ao vértice  $v$ . O vértice  $v$  recebe um peso  $w$  se a região  $U$  tem gênero  $w$ . Podemos associar ao vértice  $v$  um sinal “+” se a região  $U$  é uma região elíptica ou um sinal “-” se  $U$  é uma região hiperbólica. Em [5] foi provado que o gênero de  $M$  é dado por  $1 - V + E + W$  e que qualquer grafo bipartido  $\mathcal{G}(V, E, W)$ , onde  $W = \sum_{i=1}^V w_i = W^+ + W^-$  corresponde a soma total dos pesos nos vértices, pode ser associado a um mapa de Gauss estável de uma superfície fechada e orientada imersa no 3-espaço

No estudo das aplicações sem pontos de cúspides no conjunto singular, em em [6], foi definido *grafo 2-negativo*, que são grafos em que todos os vértices com sinal negativo “-” tem grau 2 e peso zero. Estes grafos caracterizam as aplicações de Gauss sem pontos de cúspides no conjunto parabólico, baseado no fato que não existe uma região hiperbólica simplesmente conexa sem pontos de cúspides na curva parabólica bordo desta região (ver [3]). Foi provado o seguinte resultado para grafos com peso total igual a zero: *Um grafo bipartido  $\mathcal{G}(V, E, 0)$  é um grafo correspondente a um aplicação de Gauss (de uma superfície fechada e orientada) sem pontos de cúspides se, e somente se, for um grafo 2-negativo.* Em [7], no estudos das aplicações de Gauss sem pontos de cúspides, para grafos com peso total  $W > 0$ , teve o seguinte como principal resultado: *um grafo bipartido  $\mathcal{G}(V, E, W)$  corresponde a um mapa de Gauss (de uma superfície fechada e orientada) sem pontos de cúspides se, e somente se, for um grafo 2-negativo e  $W^- = 0$ .*

Este resultado geral para as aplicações de Gauss sem cúspides garante que as regiões hiperbólicas destas aplicações são homeofomas ao cilindro. As técnicas para a prova deste resultado estão baseadas na construção de aplicações de superfícies com gênero baixo, aplicando as transições de

<sup>1</sup>cmendesjesus@ufjf.br

<sup>2</sup>pantaleon.romero@uchceu.es

<sup>3</sup>esanabri@mat.upv.es

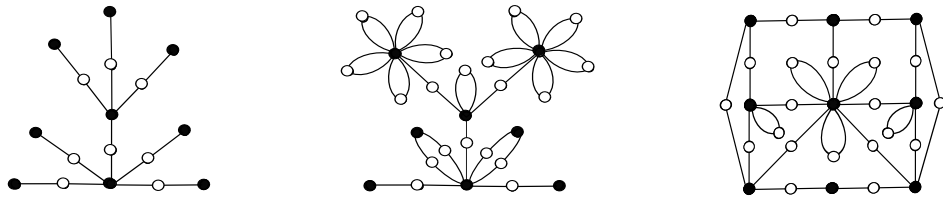


Figure 1: Exemplos de grafos 2-negativo.

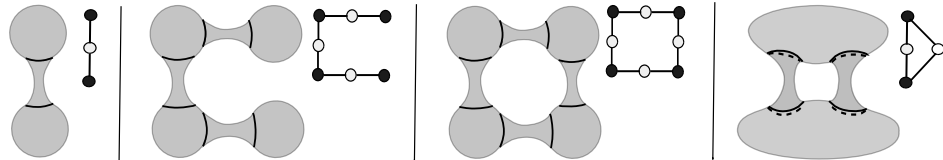


Figure 2: Exemplos de grafos associados às aplicações de Gauss sem cúspides.

codimensão 1, introduzidas em [2], e cirurgias entre estas aplicações, introduzidas em [5, 7]. O objetivo deste trabalho é apresentar grafos básicos associado às aplicações de Gauss e construções e a realizações de um grafos por aplicações sem pontos de cúspides no conjunto singular.

## References

- [1] Banchoff, T., Gaffney, T. and McCrory, C. Cusps of Gauss Mappings, *Pitman Books Limited*, London, (1982). Web version with D. Dreibelbis [www.math.brown.edu/~dan/cgm/index.html](http://www.math.brown.edu/~dan/cgm/index.html)
- [2] Bruce, J. W., Giblin, P. J. and Tari, F. Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals, *Real and complex singularities* (São Carlos, 1994) *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, volume 333, Longman, Harlow, paginas 148–178, 1995.
- [3] Camacho, C. and Lins Neto, A. *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston, 1985.
- [4] Golubitsky, M. and Guillemin, V. *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [5] Mendes de Jesus, C., de Moraes, S. M. and Romero-Fuster, M. C. Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 42:87–103(2011). DOI: 10.1007/s00574-011-0005-8
- [6] Mendes de Jesus, C. and Sanabria-Codesal, E. Realization of graphs by fold Gauss maps, *Topology and Its Appl.*, 234: 248–258, 2018. DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.016
- [7] Mendes de Jesus, C., Sanabria-Codesal, E. and Romero, P. D. Fold Gauss maps on closed orientable surfaces, *preprint 2020*
- [8] Romero-Fuster, M. C. Sphere stratifications and the Gauss map, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 95A: 115–136, 1983. DOI: 10.1017/S0308210500015821