Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução numérica do problema de Bratu unidimensional

Matheus Becali Rocha[1]
Emanuel Oliveira Souza[2]
Lucas Calegari Tavares[3]
Jesse Pinha de Sousa[4]
Isaac P. Santos[5]
Curso de Graduação em Matemática Industrial - UFES, Campus de São Mateus, ES

Introdução

O problema de Bratu foi apresentado em 1914 pelo matemático francês G. Bratu [1]. Sua versão clássica consiste em um modelo matemático composto por uma equação diferencial parcial elíptica não linear, com condições de contorno de Dirichlet homogêneas. No caso unidimensional, o problema de Bratu é descrito por

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

onde $\lambda > 0$ e cuja solução exata é

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh\left((x - \frac{1}{2})\frac{\theta}{2} \right)}{\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)} \right], \tag{3}$$

com o parâmetro θ satisfazendo a equação não linear, $\theta = \sqrt{2\lambda}\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)$. Existe um valor crítico para λ, denotado por λ_c, tal que (i) se $\lambda > \lambda_c$, o problema de Bratu não tem solução; (ii) se $\lambda = \lambda_c$, o problema de Bratu tem uma única solução; (iii) se $0 < \lambda < \lambda_c$, o problema de Bratu tem 2 soluções. O parâmetro λ_c satisfaz a equação, $1 = \frac{1}{4}\sqrt{2\lambda_c}\sinh\left(\frac{\theta_c}{4}\right)$, e é dado por $\lambda_c = 3.513830719$.

A importância do problema de Bratu se destaca por sua variedade de aplicações nas áreas de física, química e engenharia (ver [4] para maiores detalhes). Devido sua simplicidade, esse modelo é utilizado como um *benchmarking* para testar metodologias numéricas [4].

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo numérico do problema de Bratu, (1)-(2), com os métodos de diferenças finitas centradas (DC) e diferenças finitas não usuais de Mickens (*Non-Standard Finite Diference Method* - NSFD) [2]. Neste caso, a versão discreta do problema (1)-(2) é dado por

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\varphi(h)} + \lambda e^{u_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1,$$

[1]matheusbecali@gmail.com
[2]emaoliver97@gmail.com
[3]tavareslucasct@gmail.com
[4]jpsjesse90@gmail.com
[5]isaac.santos@ufes.br

onde $u_i \approx u(x_i)$, $u_0 = u(0) = 0$ e $u_n = u(1) = 0$. Para o método DC, $\varphi(h) = h^2$, enquanto que para o método NSFD, $\varphi(h) = 2\ln(\cosh(h))$. Para o processo de linearização foi utilizado os métodos de Ponto Fixo, Newton e Broyden com atualização da inversa usando a fórmula de Sherman-Morrison [3]. O domínio $[0, 1]$ foi discretizado usando uma malha uniforme com $n = 100$ subintervalos ($n + 1$ pontos). A solução inicial é $u^0(x) = \alpha\sin(\pi x)$, onde $\alpha > 0$ e como critério de parada do processo não linear, utilizamos o erro relativo (usando a solução exata dada na Eq. (3)), com tolerância $tol = 10^{-7}$, considerando o número máximo de iterações igual a 100. Os experimentos numéricos foram realizados em uma máquina com processador Intel core i3 e 4gb de memória RAM, usando a linguagem Python 3.

Resultados numéricos

A Tabela 1 apresenta os resultados numéricos (erros relativos medidos na norma do infinito e número de iterações) com os métodos diferenças centradas (DC) e diferenças não usuais de Mickens (NSFD), considerando as seguintes metodologias de linearização: Ponto fixo, Newton e Broyden. Além disso, avaliamos o problema considerando $\lambda = 1,\ 3$, caso em que o modelo de Bratu possui 2 soluções, e $\alpha = 1,\ 8$ (cada valor de α define uma das duas soluções do problema). Quando $\alpha = 1$ todos os processos de linearização convergiram (para $\lambda = 1,\ 3$), com o método NSFD apresentando um erro levemente menor, em comparação com o método DC. O método do Ponto fixo apresentou o maior número de iterações, como esperado. No caso de $\alpha = 8$ e $\lambda = 1$, o método de Ponto fixo apresentou *overflow*, o método de Newton convergiu em 9 iterações para ambos métodos (DC e NSFD) e o método de Broyden convergiu somente para o método NSFD, em 41 iterações. Quando $\alpha = 8$ e $\lambda = 3$ todos os métodos apresentaram *overflow*, por isso não foram incluídos na tabela.

Tabela 1: Erros relativos e número de iterações, considerando $\lambda = 1, 3$ e $\alpha = 1, 8$.

Métodos	**Ponto fixo**		**Newton**		**Broyden**	
	erro	**iter**	**erro**	**iter**	**erro**	**iter**
DC ($\lambda = 1, \alpha = 1$)	1.01×10^{-5}	10	1.01×10^{-5}	4	1.01×10^{-5}	5
NSFD ($\lambda = 1, \alpha = 1$)	8.75×10^{-6}	10	8.75×10^{-6}	4	8.75×10^{-6}	5
DC ($\lambda = 3, \alpha = 1$)	7.40×10^{-5}	25	7.39×10^{-5}	5	7.39×10^{-5}	6
NSFD ($\lambda = 3, \alpha = 1$)	3.81×10^{-5}	25	3.80×10^{-5}	5	3.80×10^{-5}	6
DC ($\lambda = 1, \alpha = 8$)	–	–	6.65×10^{-5}	9	–	–
NSFD ($\lambda = 1, \alpha = 8$)	–	–	6.27×10^{-5}	9	6.27×10^{-5}	41

Referências

[1] Bratu, G. *Sur les équations intégrales non linéaires.* Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 42 (1914) , pages 113-142. DOI: 10.24033/bsmf.943.

[2] Mickens, R. E. *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1994.

[3] Burden, R. L. Faires, D. J. , Burden, A. M. *Análise Numérica - Tradução da 10ª edição norte-americana*, Cengage Learning Editores, 2016.

[4] Al-Mazmumy, M. Al-Mutairi, A. and Al-Zahrani, K. *An Efficient Decomposition Method for Solving Bratu's Boundary Value Problem.* American Journal of Computational Mathematics, volume 7, pages 84-93, 2017. DOI: 10.4236/ajcm.2017.71007.