Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência de soluções absolutamente contínuas para equações diferenciais com argumento constante por partes do tipo generalizado

Iguer Luis Domini dos Santos[1]
Departamento de Matemática/UNESP, Ilha Solteira, SP

1 Introdução

No presente trabalho são abordadas equações diferenciais com argumento constante por partes do tipo generalizado. Tais equações diferenciais foram estudadas, por exemplo, em [1], [2] e [3]. Estuda-se aqui a existência de soluções absolutamente contínuas. Observa-se que a literatura carece de resultados relativos a soluções absolutamente contínuas.

No que se segue, $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}^+$ denota o conjunto dos números reais não negativos, ou seja, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Além disso, a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, será denotada por $\|.\|$. Seja $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma dada sequência de números reais de modo que $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_i < \cdots$ e $\theta_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. A classe de equações diferenciais estudada aqui é dada na equação (1)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\beta(t))) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $\beta(t) = \theta_i$ se $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$. A equação (1) foi considerada em [3] para o estudo da estabilidade. Entretanto, soluções absolutamente contínuas não foram consideradas para a equação (1) na literatura.

Diz-se que uma função absolutamente contínua $x(t)$ é uma solução da equação (1) em $\mathbb{R}^+$, se $x(t)$ satisfaz a equação (1) para quase todo ponto $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$. A terminologia “para quase todo ponto”utilizada aqui diz respeito à medida de Lebesgue.

2 Resultado Principal

A existência de soluções absolutamente contínuas para a equação (1) encontra-se enunciada no teorema 2.1.

Teorema 2.1. *Suponha que a função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes hipóteses:*

(i) $f(., x, y)$ é Lebesgue mensurável para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

(ii) para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma função $k_i : [\theta_i, \theta_{i+1}] \to [0, \infty)$ Lebesgue integrável de modo que

$$\|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)\| \leq k_i(t)\|x_1 - x_2\|$$

para todo $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ e para quase todo ponto $t \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$.

[1] iguer.santos@unesp.br

Então, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *existe uma única solução absolutamente contínua* $x(t)$ *para a equação* (1) *de modo que* $x(0) = x_0$.

O teorema 2.1 pode ser obtido a partir do corolário [[4], Corollary 2.4.5] da seguinte forma. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, do corolário [[4], Corollary 2.4.5] existe uma única solução $y_0(\cdot)$ para a equação (1) em $[\theta_0, \theta_1]$ com $y_0(0) = x_0$. Se $y_0(\theta_1) = w_1$, segue do corolário [[4], Corollary 2.4.5] que existe uma única solução $y_1(\cdot)$ para a equação (1) em $[\theta_1, \theta_2]$ com $y_1(\theta_1) = w_1$. Usando o corolário [[4], Corollary 2.4.5] e indução matemática, obtemos uma sequência $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de soluções $y_i : [\theta_i, \theta_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ para a equação (1) em $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ com $y_i(\theta_i) = w_i$ e $w_0 = x_0$. A função $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$x(t) = y_i(t)$$

para todo $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ e para cada $i \in \mathbb{N}$, é a única solução para a equação (1) em $\mathbb{R}^+$ com $x(0) = x_0$.

Referências

[1] Akhmet, M. U. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Anal.*, 66:367–383, 2007. DOI:10.1016/j.na.2005.11.032.

[2] Akhmet, M. U. Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Anal.: Hybrid Syst.*, 2:456–467, 2008. DOI:10.1016/j.nahs.2006.09.002.

[3] Akhmet, M. U., Aruğaslan, D. and Yılmaz, E. Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay, *J. Comput. Appl. Math.*, 235:4554–4560, 2011. DOI:10.1016/j.cam.2010.02.043.

[4] Vinter, R. *Optimal control*. Birkhäuser, Boston, 2000.

