

Correção de Viés da Intensidade de Tráfego em Filas Markovianas de Servidor Único via *Bootstrap* Paramétrico

Eriky S. Gomes¹

EE/UFMG, Belo Horizonte, MG

Frederico R. B. Cruz²

ICEx/UFMG, Belo Horizonte, MG

As filas markovianas de servidor único, ou filas $M/M/1$, segundo a notação de Kendall, são um dos sistemas mais simples conhecidos na teoria das filas, mas com grande aplicabilidade nas engenharias. Nas filas $M/M/1$, o número de chegadas segue um processo de Poisson com taxa μ e os tempos de atendimento são markovianos, ou seja, seguem uma distribuição exponencial, com taxa λ . A razão $\rho = \lambda/\mu$ é denominada intensidade de tráfego, e, além de representar a proporção de tempo na qual o sistema está ocupado, é de especial interesse para os projetistas, por possibilitar a determinação de outras medidas de desempenho importantes das filas, tais como o tamanho médio da fila L_q ou o número esperado de usuários no sistema L_s . O problema tratado neste artigo é o de estimação estatística de ρ , o que se dá via dados coletados do sistema, conforme detalhado a seguir.

Seja $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma amostra aleatória, de tamanho n , de uma variável aleatória X , independente e identicamente distribuída, que representa o número de chegadas durante o tempo de serviço de um usuário da fila $M/M/1$. Pode-se mostrar que sua função massa de probabilidade é dada pela seguinte equação.

$$P(X = x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Saroja et al. [3], no seu recente artigo, estudaram estimadores de máxima verossimilhança e bayesianos, baseado na função distribuição de probabilidade a priori $\text{Beta}(\alpha, \beta)$, para as funções de perda SELF (do inglês, *squared error loss function*) e PLF (do inglês, *precautionary loss function*), para ρ , para amostras aleatórias, \mathbf{x} , do número de chegadas durante os tempos de serviço. Entretanto, Saroja et al. [3] demonstraram que os estimadores apresentaram viés para amostras pequenas. O objetivo aqui é investigar a correção do viés de tais estimadores, por meio do *bootstrap*, que é um método largamente reconhecido na literatura pelos bons resultados que alcança, inclusive na correção de viés de estimadores de filas [1].

Em sua versão paramétrica, o procedimento *bootstrap* para estimar o viés do estimador de interesse $\hat{\rho}$ consiste em realizar B reamostragens (normalmente em torno de 100) da Eq. (1), estimando o parâmetro após cada reamostragem, através desse estimador enviesado. Depois, a média dessas estimativas $\bar{\rho}_{(\bullet)}$ é calculada e pode-se, portanto, estimar o viés desse estimador como $\text{bias}_B = \bar{\rho}_{(\bullet)} - \hat{\rho}$. A correção é obtida, então, pela seguinte expressão.

$$\tilde{\rho}_B = \hat{\rho} - \text{bias}_B = 2\hat{\rho} - \bar{\rho}_{(\bullet)}. \quad (2)$$

¹eriky-tn@ufmg.br.

²fcruz@est.ufmg.br.

Experimentos computacionais foram realizados para atestar a eficiência da correção dos estimadores anteriormente citados, por meio de simulações Monte Carlo, via programas codificados em R [2], disponíveis a pedido diretamente com os autores. Para isso, utilizaram-se tamanhos de amostra $n \in \{10, 20, 50, 80, 100, 200\}$ e parâmetros $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.1$, que representam aproximadamente uma distribuição a priori uniforme, para os estimadores bayesianos, com 1000 replicações Monte Carlo em cada caso. Sendo assim, para cada replicação, 100 reamostragens *bootstrap* foram geradas, a partir da Eq. (1), que é uma distribuição geométrica de parâmetro $1/(1 + \rho)$. A avaliação de desempenho foi feita comparando-se os erros de estimação dos estimadores viesados e corrigidos via *bootstrap* paramétrico. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 1.

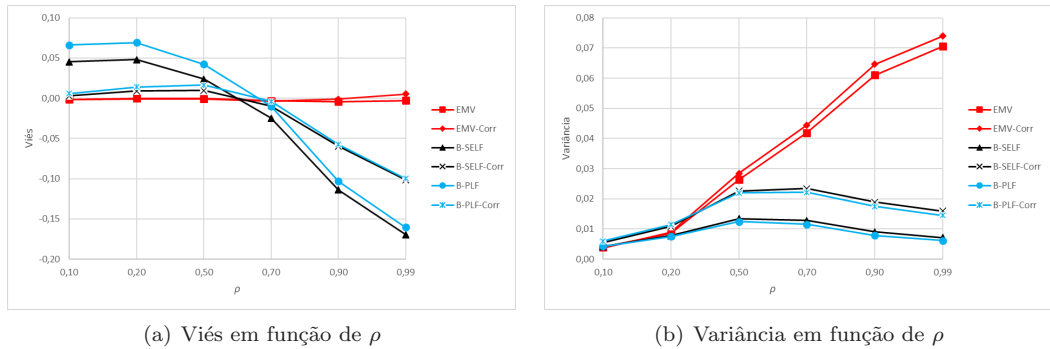


Figura 1: Desempenho das correções de viés

Da Figura 1-(a), nota-se que os estimadores corrigidos tiveram desempenho melhor em todo o espaço paramétrico, com exceção dos estimadores de máxima verossimilhança, que apresentaram desempenho superior para $\rho = 0.99$. Da Figura 1-(b), percebe-se que o *bootstrap* paramétrico não aumentou significativamente a variância das estimativas, para valores baixos da intensidade de tráfego ($\rho \leq 0.20$). Além disso, resultados experimentais (não apresentados) mostraram que as estimativas corrigidas convergem para o valor real do parâmetro ρ quando o tamanho da amostra cresce.

Tópicos para futuros trabalhos nessa área incluem a consideração de diferentes prioris. Ademais, pode-se estender esse estudo para outros parâmetros das filas, tais como o Lq e o Ls , entre outros.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, processo 160974/2020-8) e à Universidade Federal de Minas Gerais, através de sua Pró-Reitoria de Pesquisa, pelo apoio a este trabalho.

Referências

- [1] M. A. C. Almeida, F. R. B. Cruz, F. L. P. Oliveira, and G. de Souza. Bias correction for estimation of performance measures of a Markovian queue. *Operational Research*, 20(2):943–958, 2020.
- [2] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018.
- [3] S. K. Singh, A. D. Banik, E. S. Gomes, and F. R. B. Cruz. Estimating traffic intensity for single server markovian queueing systems. *Quality Technology & Quantitative Management*, pages 1–30, 2021. (under review), <http://www.est.ufmg.br/ftp/fcruz/publics/bayesmer1.pdf>.