

# Comprimento de Desenvolvimento de Escoamentos *Poiseuille* Newtoniano com Escorregamento

Caroline Viezel<sup>1</sup>

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC - USP, São Carlos, SP

Gilcilene Sanchez de Paulo<sup>2</sup>

Departamento de Matemática e Computação, FCT - UNESP, Presidente Prudente, SP

**Resumo.** Neste trabalho apresentam-se os resultados obtidos pela análise numérica do comprimento de desenvolvimento  $\mathcal{L}$  em escoamentos *Poiseuille* Newtonianos com condição *slip* na parede. Os resultados numéricos são decorrentes das simulações na plataforma *Freeflow-2D* alterada para resolver problemas confinados com condição *slip* na parede.

**Palavras-chave.** Escoamentos *Poiseuille*, Comprimento de desenvolvimento, Condição *slip*, Simulação computacional.

## 1 Introdução

Escoamentos laminares de *Poiseuille*, caracterizados como escoamentos totalmente desenvolvidos, são clássicos em mecânica dos fluidos computacional principalmente na verificação de códigos e novas metodologias numéricas. Neste tipo de escoamento é necessário uma certa distância axial da entrada do canal para se obter a velocidade parabólica desenvolvida, caso seja imposto um perfil de velocidade uniforme nesse contorno. Sendo assim, define-se comprimento de entrada ou comprimento de desenvolvimento a distância axial da entrada de um canal ou tubo até o ponto onde o escoamento encontra-se em regime totalmente desenvolvido.

Na literatura, há diversos estudos sobre o comprimento de desenvolvimento em escoamentos Newtonianos levando em consideração a condição *no-slip* na parede (ver [3]). Em contribuição a ampliação dessas pesquisas, Ferrás et al. [4] apresentaram uma análise do comprimento de desenvolvimento considerando a condição *slip* na parede.

Neste trabalho, serão apresentados resultados numéricos paralelos aos obtidos por Ferrás et al. em [4], com o objetivo inicial de verificar a metodologia desenvolvida em [9], a qual poderá ser estendida, posteriormente, para resolver problemas mais complexos de interesse industrial. Desta forma, considerou-se um escoamento Newtoniano planar em um canal, como mostrado na Figura 1, com perfil de entrada reto  $U = 1m/s$ . Assim como

---

<sup>1</sup>cviezel@usp.br

<sup>2</sup>gilcilene@fct.unesp.br

em [4], o comprimento  $\mathcal{L}$  foi determinado sobre o eixo de simetria  $y = 0$ , a partir da entrada do canal até a posição axial onde a velocidade numérica atingisse 99% da velocidade máxima  $u_{max}$ .

## 2 Formulação Matemática

As equações que regem escoamentos Newtoniano laminares incompressíveis e isotérmicos são as equações da continuidade e momento,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

sendo  $\mathbf{u}$  o campo vetorial de velocidade, a variável escalar  $p$  é a pressão e  $t$  é a variável temporal. Neste trabalho, o número de Reynolds é definido pela largura do canal  $L$ , a velocidade média do escoamento  $U$ , a viscosidade  $\eta_s$  do fluido Newtoniano e a densidade  $\rho$  do fluido que em escoamentos incompressíveis é constante,  $Re = \frac{\rho UL}{\eta_s}$ .

As Equações (1) e (2) são escritas em coordenadas Cartesianas bidimensionais, adotando-se a seguinte representação para o campo de velocidades,  $\mathbf{u} = [u(x, y, t) \ v(x, y, t)]^\top$ . Para resolvê-las considera-se a condição inicial  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t_0) = \mathbf{0}$  para todo  $(x, y)$  no interior do canal e  $t_0 = 0$  o tempo inicial, e impõe-se as condições de contorno descritas a seguir.

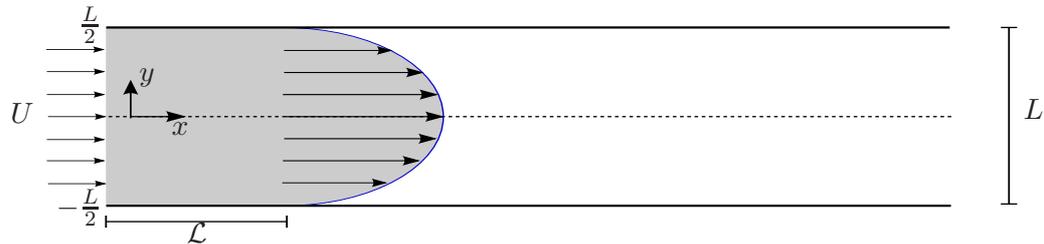


Figura 1: Esquema de domínio do problema.

Na entrada do canal, fronteira denominada por *inflow* ou injetor, considera-se as componentes de velocidades prescritas por  $u = U$  e  $v = 0$ , enquanto que na saída do canal (*outflow* ou ejetor) admite-se a condição de Neumann homogênea na direção normal a fronteira, direção  $x$ :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . A fronteira rígida, *wall* ou parede, será impermeável,  $v = 0$ , e escorregadia. Para representar o escorregamento na parede será adotada a lei de escorregamento Navier-linear [5, 7], cuja lei é uma relação linear entre a velocidade de escorregamento e a tensão de cisalhamento na parede,

$$u_{wall} = \mp k_{nl} \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{wall}, \quad (3)$$

onde o parâmetro  $k_{nl}$ , denominado constante de fricção, regula a intensidade do escorregamento do fluido na parede e os sinais ( $\mp$ ) resultam do fato de que as derivadas possuem

sinais opostos nas paredes, ou seja,  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$  na parede superior e  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  na parede inferior. Outro detalhe da Equação (3) é que sua forma adimensional está baseada na definição  $k_{nl} = \rho U \overline{k_{nl}}$ , onde a constante de fricção  $\overline{k_{nl}}$  possui unidade de medida  $m^2s/Kg$ .

### 3 Breve descrição do método numérico

As Equações (1) e (2) acompanhadas das condições iniciais e de contorno, que foram descritas na seção 2 não são resolvidas diretamente. Por se tratar de escoamentos incompressíveis, é possível desacoplar velocidade e pressão nas Equações de Navier-Stokes com o auxílio de uma função potencial  $\psi$  oriunda do Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge. Essa segregação é conhecida como método de projeção ([2]). Assim, a metodologia numérica consiste em resolver as Equações (4)–(7) descritas a seguir no algoritmo computacional.

A plataforma de simulação numérica de escoamentos incompressíveis *Freeflow-2D* resolve as Equações de Navier-Stokes da maneira descrita acima ([6]) com a ressalva de utilizar apenas a condição de não-escorregamento na parede. Essa plataforma foi a base para a implementação da nova metodologia numérica, que inseriu um tratamento numérico para a condição de contorno de escorregamento na parede e suas implicações no novo sistema de equações. Desta forma, o novo método numérico foi desenvolvido pela técnica de diferenças finitas em uma malha deslocada adotando-se como base a formulação semi-implícita para o tratamento da velocidade [8]. Com exceção dos termos convectivos, que são discretizados pela técnica de alta ordem CUBISTA [1], as demais derivadas espaciais são discretizadas por diferenças centrais, salvo se os pontos não estiverem próximos aos contornos, onde passam a ser adotadas as diferenças regressivas ou progressivas.

Resumidamente o algoritmo computacional constitui-se dos seguintes passos. Admite-se conhecida no instante  $t_n$ :  $\mathbf{u}^n = [u^n \ v^n]^T$  e  $p^n$ .

**Passo 1:** Prescreve-se  $\tilde{p}^{n+1}$  fazendo,  $\tilde{p}^{n+1} = p^n$ .

**Passo 2:** Determina-se o campo de velocidade intermediário,

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^n - \nabla \tilde{p}^{n+1}, \quad (4)$$

fazendo  $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$  em todo o domínio e em todos os contornos impõe-se  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n$ .

De acordo com o texto, no contorno rígido pode-se escrever  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}_{wall}^n$ .

**Passo 3:** Calcula-se  $\psi^{n+1}$  via a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (5)$$

sendo  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  a condição de contorno nas paredes e *inflow*, e  $\psi = 0$  no *outflow*.

**Passo 4:** Atualiza-se o campo de velocidade no interior do domínio,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1}. \quad (6)$$

**Passo 5:** Calcula-se o novo campo de pressão,

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \psi^{n+1}. \quad (7)$$

**Passo 6:** Atualizam-se as componentes da velocidade nos contornos.

### 3.1 Implementação numérica da condição slip na malha deslocada

Considere a configuração de células adjacentes a parede como na Figura 2. A interface entre a célula exterior, fantasma, [B] e a célula de interior, com fluido, [F] representa a parede. A malha é deslocada, logo, a condição de impermeabilidade  $v = 0$  é imposta

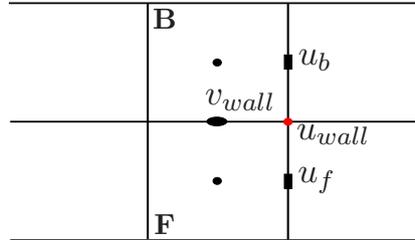


Figura 2: Representação da posição dos pontos envolvidos na discretização da velocidade na parede.

diretamente sobre a parede, na posição  $v_{wall}$ . Na malha deslocada a componente  $u$  da velocidade fica armazenada no ponto médio das faces verticais das células. Ao discretizar os termos convectivos pelo método *upwind* na posição de  $u_f$ , o valor da velocidade na posição  $u_b$  pode ser requerido. Neste trabalho, adotou-se a seguinte,

$$u_b^n = 2u_{wall}^n - u_f^n, \quad (8)$$

sendo o valor de  $u_{wall}$  fornecido pela condição *slip*, ou seja, pela Equação (3) discretizada sobre a parede, no vértice inferior direito da célula [B], da seguinte forma:

$$u_{wall} = -k_{nl} \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{wall} = -k_{nl} \frac{1}{Re} \frac{u_b - u_f}{\delta y} = -\frac{2k_{nl}}{Re} \frac{u_{wall} - u_f}{\delta y}, \quad (9)$$

logo,

$$u_{wall}^n = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_f^n. \quad (10)$$

Portanto, calcula-se primeiramente  $u_{wall}$  da Equação (10) e posteriormente atualiza-se o valor de  $u_b$  pela Equação (8).

Uma descrição mais detalhada das estratégias numéricas adotadas para resolver escoamentos confinados incompressíveis Newtonianos e, inclusive, viscoelásticos com escorregamento será encontrada em [9].

## 4 Resultados

Nesta seção será analisado o comprimento  $\mathcal{L}$  de desenvolvimento de um escoamento incompressível em um canal (ver Figura 1). O comprimento  $\mathcal{L}$  é determinado sobre o eixo de simetria  $y = 0$ , a partir da entrada do canal até a posição axial em que a velocidade

numérica atinja 99% da velocidade máxima  $u_{max}$ . Considera-se os seguintes dados:  $L = 1m$ , comprimento do canal é  $10L$ ,  $U = 1m/s$ . A malha computacional adotada possui  $410 \times 41$  células, ou seja, espaçamento  $\delta x = \delta y = 0.02439$ . O passo de tempo adotado foi  $\delta t = 1.6 \times 10^{-3}$ .

Na Tabela 1 encontram-se os valores de  $\mathcal{L}$  obtidos pela metodologia descrita neste trabalho e o erro relativo da velocidade com base na solução analítica (ver Apêndice A, Equação (11)). Além disso, apresenta-se na Tabela 1 o comprimento  $\mathcal{C}$  obtido por Ferrás et al. em [4].

Tabela 1: Comprimento de desenvolvimento e erro relativo da velocidade  $u$ . Resultados  $\mathcal{L}$  foram obtidos por este trabalho e  $\mathcal{C}$  foram obtidos por Ferrás et al. [4].

$Re$	$k_{nl}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{C}$	$\ u_{Ext} - u_{Num}\ _2 / \ u_{Ext}\ _2$
0.001	$10^{-7}$	0.6341	0.6284	$5.547989 \times 10^{-4}$
	$10^{-6}$	0.6341	0.6293	$5.500617 \times 10^{-4}$
	$10^{-5}$	0.6341	0.6377	$5.061709 \times 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.6829	0.6816	$2.682089 \times 10^{-4}$
	$10^{-3}$	0.5610	0.5560	$4.376375 \times 10^{-5}$
1.0	$10^{-4}$	0.6341	0.6411	$5.547983 \times 10^{-4}$
	$10^{-3}$	0.6341	0.642	$5.500986 \times 10^{-4}$
	$10^{-2}$	0.6341	0.6509	$5.061717 \times 10^{-4}$
	$10^{-1}$	0.7073	0.7	$2.682146 \times 10^{-4}$
	1.0	0.5610	0.5779	$4.368362 \times 10^{-5}$
10.0	$10^{-3}$	0.8049	0.8144	$5.548178 \times 10^{-4}$
	$10^{-2}$	0.8049	0.8159	$5.500586 \times 10^{-4}$
	$10^{-1}$	0.8293	0.831	$5.061765 \times 10^{-4}$
	1.0	0.9512	0.9388	$2.681705 \times 10^{-4}$
	10.0	0.8293	0.8441	$4.377037 \times 10^{-5}$

Observando os dados da Tabela 1 e a Figura 3 verifica-se que o comprimento de desenvolvimento possui uma relação não linear com o coeficiente de fricção, assim como Ferrás et al. já tinham observado em [4] (ver coluna  $\mathcal{C}$ , na Tabela 1) com uma metodologia numérica diferente da apresentada no presente trabalho.

Para valores de  $k_{nl}$  suficientemente grandes, por exemplo, o caso  $k_{nl} = 10^{-2}$  e  $Re = 0.001$ , percebe-se que a partir da entrada do canal ( $x = 0$ ), a velocidade já ultrapassa 99% da velocidade máxima. Isso fica bem mais evidente observando a Figura 4, que apresenta o comportamento da velocidade sobre o eixo de simetria  $y = 0$ . Nesse gráfico a variável  $u$  é normalizada pela velocidade máxima  $u_{max}$  obtida através da solução analítica. A reta indica quando  $u/u_{max}$  é exatamente igual a 99%.

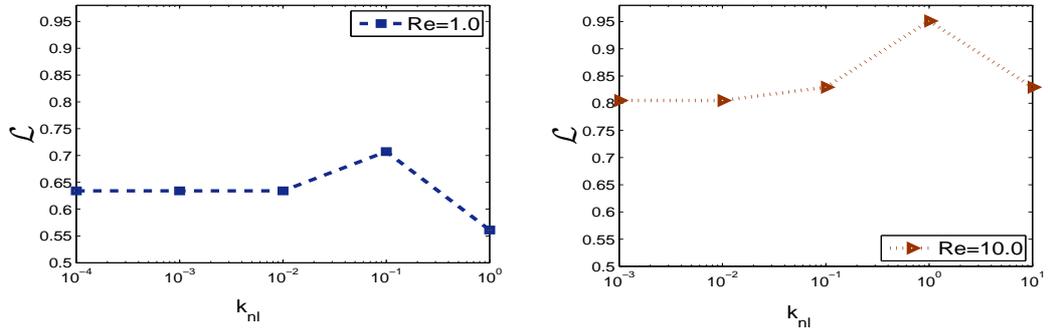


Figura 3: Comprimento de desenvolvimento do escoamento de fluido Newtoniano versus a constante de fricção adimensional  $k_{nl}$ .

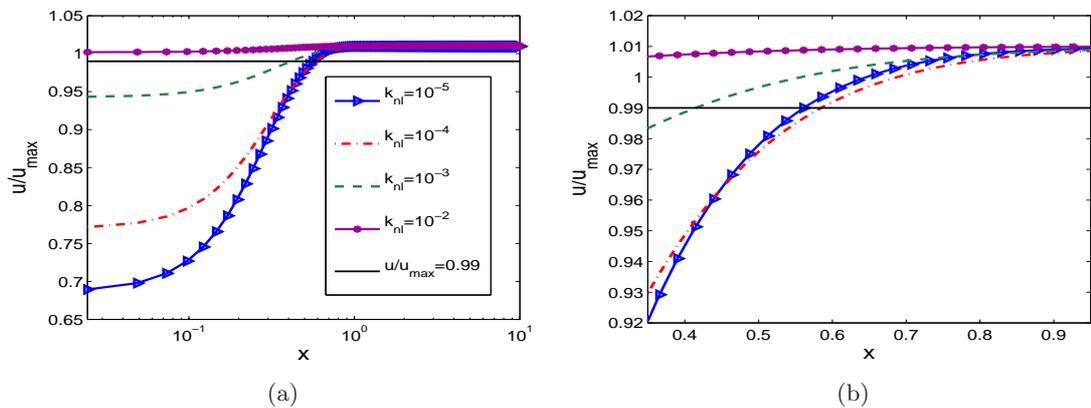


Figura 4: Velocidade sobre o eixo de simetria normalizada pela velocidade  $u_{max}$  analítica para  $Re = 0.001$  com diferentes coeficientes de fricção ( $k_{nl}$ ). (b) ampliação de (a),  $y \in [0.35, 0.95]$ .

## 5 Conclusões

A metodologia numérica apresentada para resolver escoamentos incompressíveis sob a hipótese de escorregamento na parede, baseada na técnica de diferenças finitas sobre uma malha deslocada mostrou-se eficiente para resolver estes escoamentos com escorregamento em geometria simples. Os resultados numéricos do comprimento de desenvolvimento estão de acordo com os já apresentados na literatura, ou seja, verificou-se que o comprimento de desenvolvimento possui uma relação não linear com o coeficiente de fricção para os valores de Reynolds considerados. A presente metodologia pode ser aplicada, com algumas extensões na implementação, para escoamentos com escorregamento em geometrias mais complexas, de interesse industrial.

## Agradecimentos

As autoras agradecem a FAPESP (Processo 2013/25620-1) e a CAPES pelo apoio financeiro.

## Referências

- [1] M.A. Alves, F.T. Pinho, and P.J. Oliveira. Study of steady pipe and channel flows of a single-mode phan-thien tanner fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101:55–76, 2001. DOI: 10.1016/S0377-0257(01)00159-8.
- [2] A. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Physics*, 2:12–26, 1967. DOI: 10.1006/jcph.1997.5716.
- [3] F. Durst, S. Ray, B. Ünsal, and O. Bayoumi. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of Fluids Engineering*, 127:1154–1160, 2005. DOI: 10.1115/1.2063088.
- [4] L.L. Ferrás, A.M. Afonso, M.A. Alves, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Development length in planar channel flows of newtonian fluids under the influence of wall slip. *Journal of Fluids Engineering*, 134(10):104503, 2012. DOI: 10.1115/1.4007383.
- [5] L.L. Ferrás. *Theoretical and numerical studies of slip flows*. Tese de Doutorado, Universidade do Minho, 2012.
- [6] S. McKee; M.F. Tome; V.G. Ferreira; J.A. Cuminato; A. Castelo; F.S. Sousa; N. Mangiavacchi. The mac method. *Computers and Fluids*, 37:907–930, 2008.
- [7] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. mémoires de l’académie royale des sciences de l’institut de france. *Sciences de L’Institut de France*, VI:389–440, 1823.
- [8] C.M. Oishi. *Análise e implementação de métodos implícitos e de projeção para escoamentos com superfície livre*. Tese de Doutorado, ICMC/USP, 2008.
- [9] C. Viezel. Estudos teóricos e numéricos de escoamentos com escorregamento. Dissertação de Mestrado, FCT/UNESP, 2015.

## A Solução Analítica

A solução analítica para escoamentos incompressíveis e isotérmicos totalmente desenvolvidos em um canal sob a condição de contorno Navier-linear (3) é dada pela expressão,

$$u(y) = -\frac{p_x Re}{8} [1 - 4y^2] - k_{nl} \left[ \frac{1}{2} p_x \right], \quad (11)$$

sendo  $p_x$  o gradiente de pressão constante. Maiores detalhes sobre a obtenção desta solução analítica e, também, para o caso de fluidos viscoelásticos PTT são encontrados em [9].