Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Syzygy entre os Invariantes da Viscoelasticidade Não-Linear Isotrópica

Gabriel Lopes da Rocha[1]
Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia - EESC/FMRP/IQSC, USP, São Carlos, SP
Adair Roberto Aguiar[2]
Departamento de Engenharia de Estruturas - SET/EESC, USP, São Carlos, SP
Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia - EESC/FMRP/IQSC, USP, São Carlos, SP

Resumo. De um modo geral, estruturas biológicas são anisotrópicas, heterogêneas e estão sujeitas a grandes deformações. Muito embora seja comum a utilização da teoria de elasticidade para modelar o comportamento destas estruturas, sabe-se que o comportamento de, por exemplo, tendões e ligamentos, é melhor modelado no contexto da teoria de viscoelasticidade. Neste trabalho considera-se uma classe de materiais viscoelásticos compressíveis e isotrópicos do tipo diferencial de primeira ordem que satisfaz o princípio da invariância sob mudança de observador. Neste caso, a função resposta mecânica que fornece a tensão de Cauchy depende do tensor deformação de Cauchy-Green à esquerda $\mathbf{B}$ e da parte simétrica do gradiente de velocidade $\mathbf{D}$. Utilizando a teoria de representação de funções isotrópicas, mostra-se que esta função resposta é dada em termos de produtos dos tensores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ e de coeficientes multiplicando estes produtos que dependem de dez invariantes dos mesmos. Mostramos que somente nove dos dez invariantes são independentes e que existe um *syzygy* entre os mesmos. Consequentemente, quaisquer outros conjuntos de dez invariantes, determinados de forma única deste conjunto, têm somente nove invariantes independentes. Esta investigação é relevante em procedimentos experimentais empregados na caracterização de relações constitutivas de tecidos biológicos.

Palavras-chave. Viscoelasticidade Não-Linear, Teoria de Representação, Função Isotrópica, Syzygy

1 Introdução

Polímeros (borracha, silicone, plástico), compósitos poliméricos (poliéster, laminados de fibras e resina) e biomaterais (tecidos moles, tendão e ligamentos) são alguns exemplos de materiais de interesse tecnológico e médico (e.g., [3]) que apresentam propriedade viscoelástica e podem ser modelados por meio de uma relação constitutiva entre o tensor

[1]gabrielmat04@usp.br
[2]aguiarar@sc.usp.br

de Cauchy $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ e o gradiente de deformação $\mathbf{F} \in \mathcal{L}$ juntamente com suas derivadas temporais materiais (e.g., [4]). O conjunto $\mathcal{L}$ é constituído de tensores de segunda ordem definidos sobre um espaço euclidiano tridimensional e $\mathcal{S}$ é o subconjunto dos tensores simétricos de $\mathcal{L}$. Um material modelado por tal relação constitutiva é chamado de material do tipo diferencial. Supondo que o tensor $\mathbf{T}$ é dado por uma relação que depende somente de $\mathbf{F}$ e de sua primeira derivada temporal e utilizando o princípio da invariância sob mudança de observador, obtemos a relação clássica de um material do tipo diferencial de primeira ordem, dada por

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{B}, \mathbf{D})\,, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é a função resposta mecânica do material, $\mathbf{B} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{F}\,\mathbf{F}^T$ é o tensor de Cauchy-Green à esquerda e $\mathbf{D} \in \mathcal{S}$ é a parte simétrica do gradiente de velocidade $\mathbf{L} = (d\,\mathbf{F}/d\,t)\,\mathbf{F}^{-1}$.

No caso de um material isotrópico, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ é uma função tensorial isotrópica e satisfaz a relação

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\,\mathbf{D}\,\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{B}, \mathbf{D})\,\mathbf{Q}^T\,, \qquad \forall\, \mathbf{Q} \in \mathcal{O}\,, \tag{2}$$

em que $\mathcal{O} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{Q} \in \mathcal{L} \,|\, \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q} = \mathbf{1}, \det \mathbf{Q} = 1\}$ é o conjunto dos tensores ortogonais próprios. Segue da teoria de representação de funções isotrópicas que ([7])

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \;=\; & \alpha_0\,\mathbf{1} + \alpha_1\,\mathbf{B} + \alpha_2\,\mathbf{B}^2 + \alpha_3\,\mathbf{D} + \alpha_4\,\mathbf{D}^2 + \alpha_5\,(\mathbf{D}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{D}) \;+ \\ & \alpha_6\left(\mathbf{D}\,\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\,\mathbf{D}\right) + \alpha_7\left(\mathbf{D}^2\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{D}^2\right) + \alpha_8\left(\mathbf{D}^2\,\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\,\mathbf{D}^2\right)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Em (3), os coeficientes α_i, $i = 0\,, \cdots, 8$, dependem dos invariantes clássicos

$$\begin{aligned}& I_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\mathbf{B}\,, \quad I_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{I_1^2 - \operatorname{tr}\mathbf{B}^2}{2}\,, \quad I_3 \overset{\text{def}}{=} \det\mathbf{B}\,, \\ & I_4 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\mathbf{D}\,, \quad I_5 \overset{\text{def}}{=} \frac{I_4^2 - \operatorname{tr}\mathbf{D}^2}{2}\,, \quad I_6 \overset{\text{def}}{=} \det\mathbf{D}\,, \quad I_7 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\,(\mathbf{B}\mathbf{D})\,, \\ & I_8 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\,\left(\mathbf{B}^2\mathbf{D}\right), \quad I_9 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\,\left(\mathbf{B}\mathbf{D}^2\right), \quad I_{10} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\,\left(\mathbf{B}^2\mathbf{D}^2\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Os invariantes listados em (4) formam uma base de integridade, definida como o conjunto de invariantes com a propriedade de que qualquer outro invariante pode ser representado como uma função polinomial dos elementos da base. Além disso, esta base é mínima, pois possui o menor número possível de elementos.

Neste trabalho, mostramos que existe uma relação de dependência não-polinomial, chamada *syzygy*, entre os invariantes da base de integridade mínima. Syzygies permitem reduzir o número de invariantes independentes necessários para representar a função resposta mecânica e, portanto, simplificam os procedimentos experimentais empregados na obtenção das propriedades mecânicas.

Por exemplo, a função resposta mecânica de um material hyperelástico compressível e ortotrópico é obtida da derivada de uma densidade de energia de deformação ϕ que depende de $\mathbf{B}$ e de dois vetores ortogonais $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ na configuração deformada do corpo. Esta densidade de energia é uma função escalar isotrópica que, portanto, satisfaz a relação

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0264

$\phi(\mathbf{B}\,, \mathbf{a}\,, \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{Q}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Q}^T\,, \mathbf{Q}\,\mathbf{a}\,, \mathbf{Q}\,\mathbf{b})$. Segue da teoria de representação de funções isotrópicas ([6]) que existe uma representação escalar $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3, J_4)$ em que I_i, $i = 1, 2, 3$, são dados pelas três primeiras expressões em (4), respectivamente, e J_i, $i = 1, \cdots, 4$, são dados por $J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}\,\mathbf{a}\,,\ J_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}^2\,\mathbf{a}\,,\ J_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}\,\mathbf{b}\,,\ J_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}^2\,\mathbf{b}\,,$ em que "$\cdot$" denota o produto interno em $\mathbb{R}^3$. Estes invariantes formam uma base de integridade mínima para $\tilde{\phi}$. Apesar de alguns autores, tais como [1, 2], argumentarem que estes invariantes são independentes entre si, Shariff [5] mostra que existe um syzygy entre os mesmos e que, portanto, não são independentes.

2 Syzygy

Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ o conjunto de autoversores de $\mathbf{B}$ e seja $\beta_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B}\,\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, o autovalor de $\mathbf{B}$ associado a $\mathbf{e}_i$. Uma vez que este conjunto é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, as componentes de $\mathbf{D}$ em relação a esta base são dadas por

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{D}\,\mathbf{e}_j\,. \tag{5}$$

Uma vez que os tensores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ são unicamente determinados pelas nove componentes $\beta_i\,, \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, e que, portanto, os dez invariantes de (4) são dados em termos destas componentes, está claro que existe uma relação de dependência entre estes invariantes.

A estratégia para estabelecer um syzygy entre os dez invariantes de (4) consiste em estabelecer uma bijeção entre o conjunto destes invariantes e o conjunto das componentes dos tensores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Neste sentido, segue de (4) que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\,, \quad I_2 = \beta_1\,\beta_2 + \beta_2\,\beta_3 + \beta_3\,\beta_1\,, \quad I_3 = \beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,,\\
I_4 &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}\,, \quad I_5 = \delta_{11}\,\delta_{22} + \delta_{22}\,\delta_{33} + \delta_{33}\,\delta_{11} - \delta_{12}^2 - \delta_{23}^2 - \delta_{31}^2\,,\\
I_6 &= \delta_{11}\,\delta_{22}\,\delta_{33} + 2\,\delta_{12}\,\delta_{23}\,\delta_{31} - \delta_{31}^2\,\delta_{22} - \delta_{23}^2\,\delta_{11} - \delta_{12}^2\,\delta_{33}\,,\\
I_7 &= \beta_1\,\delta_{11} + \beta_2\,\delta_{22} + \beta_3\,\delta_{33}, \quad I_8 = \beta_1^2\,\delta_{11} + \beta_2^2\,\delta_{22} + \beta_3^2\,\delta_{33}\,,\\
I_9 &= \beta_1\left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{13}^2\right) + \beta_2\left(\delta_{12}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{23}^2\right) + \beta_3\left(\delta_{31}^2 + \delta_{23}^2 + \delta_{33}^2\right),\\
I_{10} &= \beta_1^2\left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{13}^2\right) + \beta_2^2\left(\delta_{12}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{23}^2\right) + \beta_3^2\left(\delta_{31}^2 + \delta_{23}^2 + \delta_{33}^2\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

As expressões em (6) estabelecem uma relação entre os conjuntos dos dez invariantes, dado por $\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \{I_1, \cdots, I_{10}\}$, e de termos que dependem das componentes de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$, dado por $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}, \delta_{12}^2, \delta_{23}^2, \delta_{31}^2, \delta_{12}\,\delta_{23}\,\delta_{31}\}$. Para mostrar a bijeção entre os conjuntos Ψ e Ω, expressamos os elementos de Ψ em termos dos elementos de Ω e vice-versa. Claramente, segue do exposto acima que, conhecidos os elementos de Ω, os elementos de Ψ são determinados de (6).

Por outro lado, conhecidos os elementos de Ψ, obtemos os elementos de Ω seguindo os passos abaixo.

a) As componentes β_i, $i = 1, 2, 3$, são raízes da equação característica $\beta^3 - I_1\,\beta^2 + I_2\,\beta - I_3 = 0$ e são, portanto, dadas em termos de I_i, $i = 1, 2, 3$.

b) As componentes δ_{11}, δ_{22} e δ_{33} são soluções de um sistema de equações lineares obtido das expressões de I_4, I_7 e I_8 em (6), sendo β_i, $i = 1, 2, 3$, determinadas no Passo a).

c) Os termos $\delta_{12}^2, \delta_{23}^2$ e δ_{31}^2 são soluções de um sistema de equações lineares obtido das expressões de I_5, I_9 e I_{10} em (6), sendo β_i, $i = 1, 2, 3$, δ_{11}, δ_{22} e δ_{33} determinados nos passos a) e b).

d) O termo $\delta_{12}\,\delta_{23}\,\delta_{31}$ é obtido da expressão de I_6 em (6), sendo os demais termos nesta expressão determinados nos passos anteriores.

Assim, mostramos que existe uma bijeção entre os conjuntos Ψ e Ω.

Uma vez que

$$(\delta_{12}\,\delta_{23}\,\delta_{31})^2 = \delta_{12}^2\,\delta_{23}^2\,\delta_{31}^2\,, \tag{7}$$

segue dos passos a)–d) acima que existe uma relação entre os dez invariantes do conjunto Ψ. Uma vez que a base de integridade formada por estes invariantes é mínima, a relação acima não é polinomial e, portanto, estabelecemos a existência de um syzygy entre os invariantes.

3 Conclusões

Os coeficientes da relação constitutiva de um material visoelástico compressível e isotrópico são funções escalares isotrópicas de dez invariantes obtidos de dois tensores simétricos. Mostramos que estes invariantes não são independentes entre si e que existe um syzygy entre os mesmos.

Agradecimentos

Os autores agradecem os auxílios financeiros concedidos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para o primeiro autor e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para o segundo autor.

Referências

[1] G. A. Holzapfel e R. W. Ogden. Constitutive modeling of passive myocardium: a structurally based framework of material characterization. *Philos. Trans. R. Soc. A*, 367:3445–3475, 2009.

[2] J. Merodio e R. W. Ogden. The influence of the invariant I_8 on the stress-deformation and ellipticity characteristics of doubly fiber-reinforced non-linearly elastic solids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 41:556–563, 2006.

[3] D. P. Pioletti, L. R. Rokotomanana, J. F. Benvenuti e P. F. Leyvraz. Viscoelastic constitutive law in large deformation: applications to human knee ligaments and tendons. *J. Biomech.* 31:753–757, 1998.

[4] K. Rajagopal e G. Saccomandi. Shear waves in a class of nonlinear viscoelastic solids. *Q. Jl Mech. Math.*, 56:311–326, 2003. .

[5] M. Shariff. Nonlinear Orthotropic Elasticity: Only Six Invariants are Independent. *Journal of Elasticity*, 110:237–241, 2013.

[6] A. J. M. Spencer. Constitutive theory for strongly anisotropic solids. In: Spencer, A.J.M. (ed.) ContinuumTheory of the Mechanics of Fiber Reinforced Composites. CISM Courses and Lectures, vol. 282:1–32. Springer, Wien, 1984.

[7] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics, Handbuch der Physik, III/3, ed. S. Flugge, Springer, Berlin, 1965.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0264