CONTROLE ÓTIMO COM CONDIÇÃO INICIAL INTERVALAR

ULCILEA A. SEVERINO LEAL*, GERALDO NUNES SILVA†, WELDON A. LODWICK‡

** Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS*
Campus de Chapadão do Sul
Chapadão do Sul, MS, Brasil

† Universidade Estadual de São Paulo - UNESP/IBILCE
Departamento de Matemática Aplicada
São José do Rio Preto, SP, Brasil

‡ University of Colorado Denver
Department of Mathematics
Denver, Colorado, USA

Emails: `ulcilea.leal@ufms.br, gsilva@ibilce.unesp.br, Weldon.Lodwick@ucdenver.edu`

Abstract— In this work will be presented an approach to solve linear quadratic optimal control whose initial condition has unrestrained uncertainty of interval type. For this purpose, use shall be made of the concept of integral equation and an example will be developed to illustrate this technique.

Keywords— optimal control, interval initial condition

Resumo— Neste trabalho será apresentado uma abordagem para resolver problemas de controle ótimo quadrático linear irrestrito cuja condição inicial possui incerteza do tipo intervalar. Para tal propósito, utilizar-se-á o conceito de equação integral e um exemplo será desenvolvido visando exemplificar essa técnica.

Keywords— controle ótimo, condição inicial intervalar.

1 Introdução

Os problemas de controle ótimo originaram-se da teoria do cálculo variacional por volta de 1965. Bellman (1957) e Pontryagin et al. (1965) foram grandes contribuintes para o desenvolvimento desta teoria. A teoria de controle ótimo está presente na modelagem de diversos tipos de problemas, por exemplos, físicos, biológicos, da área econômica e produtiva entre outros (Kennedy, 1986; Cacho, 1999; Campo et al., 2006).

Os problemas de controle ótimo podem ser representados de várias formas, no presente texto será considerado a classe dos problemas de controle ótimo quadrático linear irrestrito. Em geral, esses problemas são oriundos da modelagem de situações reais envolvendo incerteza, por exemplo, na falta de informações do problema, na natureza e na modelagem do mesmo. Visando descrever tais situações, este artigo considerará a seguinte situação, os problemas quadrático linear irrestrito que possui incerteza do tipo intervalar na condição inicial.

O processo de resolução deste problema será dado em duas etapas: a primeira etapa consiste em transformar o problema original em uma equação integral, segundo Lodwick (1980) e posteriormente, o problema resultante será transformado num sistema linear intervalar através de técnica de discretização.

A equação integral obtida na primeira etapa, é dada em função do kernel que é contínuo no intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$, assim, utilizando o conceito de partição de intervalo, essa será transformada em um sistema linear intervalar, uma vez que a condição inicial é um intervalo. Contudo, para resolver o sistema linear intervalar utilizar-se-á a aritmética intervalar restrita proposta por Lodwick (1999). Neste contexto, os intervalos são redefinidos como funções lineares de domínio campacto e inclinação não-negativa.

Segue abaixo, algumas notações úteis para a compreensão do texto.

Notações:

$x^T(t)$: transposto do vetor $x(t)$.

$x'(t) = \frac{dx}{}$

onde: $u(t)$ é a função de controle, $x(t)$ é a função que representa o estado do sistema, Q é uma matriz simétrica positiva definida e R é inversível simétrica e semi-positiva definida.

Aplicando a teoria do princípio do máximo de Pontryagin para esse problema e fazendo algumas manipulações algébricas (ver Lodwick (1980)), obtém-se a seguinte equação integral:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^1 K(r,t)x(r)dr, \qquad (1)$$

com

$$K(r,t) = \begin{cases} k_1(r,t) & \text{para } 0 \le r \le t \le 1 \\ k_2(r,t) & \text{para } 0 \le t < r \le 1 \end{cases},$$

e

$$\begin{array}{l} k_1(r,t) = -\int_0^r e^{A(t-s)}BR^{-1}B^T e^{-A^T(s-r)}Q ds \\ k_2(r,t) = -\int_0^t e^{A(t-s)}BR^{-1}B^T e^{-A^T(s-r)}Q ds \end{array}.$$

A equação integral apresentada em (1) é uma equação do tipo Fredholm, e a função kernel $K(r,t)$ é contínua em $[0,1] \times [0,1]$. Assim, com o intuito de resolver tal equação, dado que $K(r,t)$ é contínua, utilizar-se-á o conceito de integração numérica de Riemann, mais particularmente, os conceitos de partição de um intervalo e soma de Riemann.

Para tal propósito considere $P_1 : 0 = r_0 < r_1 < ... < r_{n-1} < r_n = 1$ uma partição do intervalo $[0,1]$, que r está definido, onde: $r_j = {}^{j}$

a variável, que é restrita entre 0 e 1. Ou seja, x é uma função de λ, com parâmetros x

apenas na condição inicial do problema de controle ótimo, somente o vetor $\widetilde{b}^I$ será dado em função da condição inicial intervalar. Utilizando, a aritmética intervalar restrita no intervalo $[0,1]$, obtém-se:

$$[0,1] \quad = \quad \{x | x = \lambda, \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

contudo, o vetor $\widetilde{b}^I$ será transformado no vetor $\widetilde{b}$ dado em função de λ. Originando-se, num sistema linear clássico dado em função de λ, para $\lambda \in [0,1]$. Para a resolução do sistema linear resultante utilizou-se o software MATLAB 7.9.

Inicialmente, apresentar-se-á a simulação quando $n = 4$, visando exemplificar detalhadamente a técnica utilizada, e posteriormente os resultados para valores de n, com n significativamente grande.

- Para $n = 4$, o sistema resultante, é o seguinte $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$, onde:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0.938 & 0.063 & 0.0623 & 0.063 \\ 0.063 & 0.875 & 0.125 & 0.125 \\ 0.063 & 0.125 & 0.813 & 0.188 \\ 0.063 & 0.125 & 0.188 & 0.750 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{x} = \left(\begin{array}{l} x(^1 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

mais simples, uma vez que, ao invés de resolver uma integral, tem-se que resolver um sistema linear. Posteriormente, o nosso propósito é considerar está abordagem para problemas com incerteza no modelo.

Agradecimentos

A primeira autora agradeçe a FAPESP, pelo apoio financeiro, processo 2012/00189-3. O segundo autor agradeçe ao CNPq, pela bolsa produtividade, processo 395418/2009-2 e o terceiro autor agradeçe a FAPESP, pois durante a execução deste trabalho este autor foi bolsista visitante na UNESP, financiado pela FAPESP, processo 2011/13985-0.

Referências

Bellman, R. (1957). *Dymanic Programming*, Princeton University Press, Priceton, NJ.

Cacho, O. J. (1999). Dynamic models, externalities and sustainability in agriculture, *Workshop Paper Series in Agricultural and Resource Economics*, pp. 1–9.

Campo, J. R., Chela, R. S., Moraes, C. R. C. and Silva, G. N. (2006). Simulações da dinâmica populacional de plantas daninhas com aplicação de controle, *Anais do 5o Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Guaratinguetá, SP, p. CD Rom.

Kennedy, J. O. S. (1986). *Dynamic Programming: Applications to Agriculture and Natural Re-sources*, Elsevier, New York, NY. DOI: 10.1007/978-94-009-4191-5

Lodwick, W. A. (1980). Two numerical methods for the solutions of optimal control problems with computed error bounds using the maximum principle of pontryagin.

Lodwick, W. A. (1999). Constrained interval arithmetic, *CCM Report* **138**.

Moore, R. E. and Kearfott, M. J. C. (2009). *Introduction to interval analysis*, Society for In-dustrial and Applied Mathematics. DOI: 10.1137/1.9780898717716

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. H., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F. (1965). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley, New York, NY.

