Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um estudo de grupos de transformações e equações diferenciais

Ana Maria da Silva[1]
IFSP, Campos do Jordão, SP
Ligia Corrêa de Souza[2]
IFSP, Campos do Jordão, SP

Embora parte das equações diferenciais possam ser resolvidas de maneira analítica, facilitando o estudo de suas propriedades, as soluções podem ser difíceis de serem obtidas, e, ainda, existem equações diferenciais que não admitem esta abordagem. Para tanto, existem duas outras abordagens, qualitativa e numérica, que podem ser utilizadas para analisar algumas informações acerca do problema ou ainda aproximar valores de uma solução desconhecida. Uma delas é o tratamento utilizando a Teoria de Lie [1].

Na maior parte, tenta-se transformar a equação diferencial parcial em uma ou mais equações diferenciais ordinárias. Isso tem por intuito simplificar os trabalhos para se obter uma solução para o problema [3].

O presente trabalho teve como objetivo o estudo de resoluções de equações diferenciais via grupo de transformações. Para isso foi escolhida a equação dada por

$$u_t \;=\; u_{xx} \;+\; \alpha u u_x,\; \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

com seu gerador da forma

$$v \;=\; \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} \;+\; \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Utilizando-se dos estudos de [2] e por se tratar de uma equação diferencial parcial de ordem 2, o seu campo (1) deve ser prolongado até a ordem 2, como descrito a seguir:

$$pr^2(v) \;=\; v \;+\eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t} \;+\; \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} \;+\; \eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\eta_t^{(1)} \;=\; D_t\eta \;-\; u_t D_t\tau \;-\; u_t D_t\xi,$$

$$\eta_x^{(1)} \;=\; D_x\eta \;-\; u_t D_x\tau \;-\; u_x D_x\xi,$$

$$\eta_{xx}^{(2)} \;=\; D_x\eta_x^{(1)} \;-\; u_{tx} D_x\tau \;-\; u_{xx} D_x\xi.$$

[1] ana.maria@aluno.ifsp.edu.br, silvaanamaria1999@hotmail.com
[2] ligiacorrea@ifsp.edu.br, li.correasouza@gmail.com

Prolongando a equação diferencial inicial, obtém-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \tau_x \ = \ 0 \\ \eta_{uu} \ = \ 0 \\ \tau_u \ = \ 0 \\ \xi_u \ = \ 0 \\ \tau_t \ - \ 2\xi_x \ = \ 0 \\ -\ \eta_t \ + \ \alpha u \eta_x \ + \ \eta_{xx} \ = \ 0 \\ \alpha\eta \ + \ \xi_t \ + \ \alpha u \xi_x \ + \ 2\eta_{xu} \ - \ \xi_{xx} \ = \ 0 \end{cases}$$

onde analisou-se $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Desenvolvendo o sistema acima, para se encontrar a solução, encontrou-se o seguinte gerador para $\alpha \ = \ 0$:

$$Z \ = \ [4t^2c_4 \ + \ 2tc_9 \ + \ c_{10}]\frac{\partial}{\partial t} \ + \ [c_{13} \ + \ xc_9 \ + \ 2tc_{11} \ + \ 4xtc_4]\frac{\partial}{\partial x} \ +$$

$$+ \ [(-c_4(x^2 \ + \ 2t) \ - \ (xc_{11} \ + \ c_{14})u \ + \ k(t,x)]\frac{\partial}{\partial u}.$$

Já para $\alpha \ \neq \ 0$, seu gerador foi dado por:

$$V \ = \ [-\alpha b_1 t^2 \ + b_3 t \ + \ b_4]\frac{\partial}{\partial t} \ + \ \left[\frac{x}{2}(-2\alpha b_1 t \ + \ b_5 \ - \ \alpha b_2 t)\right]\frac{\partial}{\partial x} \ + \ \left[\alpha b_1 t u \ - \ \frac{b_3 u}{2} \ + \ b_1 x \ + \ b_2\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

A construção da solução foi obtida via simetrias e seus geradores. Para $\alpha \ = \ 0$, encontou-se a solução

$$u(t,x) \ = \ \frac{c}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Quando adotamos $C \ = \ \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ na equação acima, obtemos a chamada solução fundamental da equação do calor:

$$u(t,x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Já para $\alpha \ \neq \ 0$, a solução encontrada foi

$$u(t,x) \ = \ C.$$

Portanto, pela complexidade para a obtenção de soluções e a sua vasta aplicabilidade, [3], o estudo desses problemas torna-se de grande importância para as diversas áreas de aplicações destas equações, não somente da modelagem, mas também das técnicas de resolução.

Além disso, esse trabalho se mostra interessante, pois observando que os diversos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática têm em sua estrutura curricular a disciplina de Equações Diferenciais, essa tal inserção no currículo de formação do licenciado em matemática é amparada quando contemplamos a literatura sobre formação de professores e as competências esperadas a serem desenvolvidas no Ensino Médio, considerando a relação existente entre resolução de problemas, modelagem matemática e equações diferenciais.

Referências

[1] Bluman, G. W.; Anco, S. C. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 154. New York: Spinger, 2002.

[2] Freire, I. L. Introdução à geometria das equações diferenciais. Apostila. 20 ago. 2019.

[3] Sodré, U. Equações diferenciais parciais. Londrina:[sn], 2003.