Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelagem do limite superior da probabilidade de ruína via princípio de extensão de Zadeh

Walef M. de Mendonça[1]
Unifal, Alfenas, MG
Leandro Ferreira[2]
Unifal, Varginha, MG

1 Introdução

A teoria da ruína trata do estudo do nível da reserva de uma seguradora para uma carteira de apólices de seguro ao longo do tempo, levando em conta os momentos em que as indenizações ocorrem, bem como seus valores. Uma seguradora entra em processo de ruína quando a quantidade do seu capital, na forma de reserva, não é capaz de arcar com os sinistros dos seus segurados. A probabilidade de ruína, denotada por $\psi(u)$, decorrente de uma reserva inicial u em um horizonte temporal infinito, é dada por $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u)$, em que a variável aleatória $T = \inf\{t > 0 \text{ e } U(t) < 0\}$ é o momento de ocorrência da ruína para uma dada reserva inicial $U(0) = u$ [2]. Pode-se encontrar o limite superior da probabilidade de ruína com base na desigualdade de Lundberg, que é dada por $\psi(u) \leq \exp\{-Ru\}$, em que R é o coeficiente de ajustamento, que representa o equilíbrio ou ajustamento entre os valores que a seguradora recebe como prêmio dos seguros e os valores que ela gasta com as indenizações [2].

A teoria dos conjuntos *fuzzy* fornece ferramentas para dar tratamento matemático a variáveis imprecisas. Seja U um conjunto clássico e A um subconjunto *fuzzy* de U. A função $\varphi_A : U \to [0,1]$ é definida como função de pertinência do subconjunto *fuzzy* A, sendo que $\varphi_A(x) \in [0,1]$ indica o grau de pertinência do elemento x de U no subconjunto *fuzzy* A. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por $[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$, para $0 < \alpha \leq 1$, sendo que $[A]^0$ é definido como o fecho do suporte de A, que é indicado por $\overline{suppA} = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}}$ [1]. Um subconjunto *fuzzy* A é considerado um número $fuzzy$ quando o conjunto universo de $\varphi_A(x)$ é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e satisfaz as seguintes propriedades: todos os α-níveis de A são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$ e; $suppA = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado [1]. O princípio de extensão de Zadeh realiza a extensão de conceitos matemáticos da teoria dos conjuntos clássicos para a teoria dos conjuntos *fuzzy*. O Teorema a seguir indica que os α-níveis do conjunto *fuzzy*, obtidos pelo princípio de extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α-níveis da função clássica [1].

Teorema. *Sejam $f : X \longrightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X, com α-níveis compactos e não vazios. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$ vale*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \tag{1}$$

[1]walef.mendonca@sou.unifal-mg.edu.br
[2]leandro.ferreira@unifal-mg.edu.br

O objetivo deste trabalho é apresentar a modelagem do limite superior da probabilidade de ruína por meio da desigualdade de Lundberg, sob a perspectiva da teoria dos conjuntos *fuzzy*, via princípio de extensão de Zadeh.

2 Metodologia

Para a modelagem do limite superior da probabilidade de ruína, serão considerados que o valor das indenizações tem distribuição exponencial com parâmetro β e o número de sinistros ocorridos tem distribuição de Poisson com parâmetro λ. Dessa maneira, conforme [2], pela desigualdade de Lundberg, o limite superior da probabilidade de ruína é dado por:

$$\psi(u) = \exp\{-Ru\} = \exp\left\{-\left(\frac{-\lambda + c\beta}{c}\right)u\right\}. \tag{2}$$

Foram considerados $u = 1$ e o parâmetro β como impreciso, representado pelo número *fuzzy* triangular $\tilde{\beta}$. Os α-níveis de $\tilde{\beta}$ são os intervalos $[\tilde{\beta}]^\alpha = [\tilde{\beta}^\alpha_{inf}, \tilde{\beta}^\alpha_{sup}] = [0,1\alpha + 0,4,\ -0,1\alpha + 0,6]$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Utilizando o princípio de extensão de Zadeh, tem-se que os α-níveis do limite superior da probabilidade de ruína em função de $\tilde{\beta}$ são dados pelos intervalos:

$$\psi\big([\tilde{\beta}]^\alpha\big) = [\psi(\tilde{\beta})]^\alpha = \left[\exp\left\{-\left(\frac{-\lambda + c\tilde{\beta}^\alpha_{sup}}{c}\right)\right\}, \exp\left\{-\left(\frac{-\lambda + c\tilde{\beta}^\alpha_{inf}}{c}\right)\right\}\right]. \tag{3}$$

3 Resultados

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para o limite superior da probabilidade de ruína, considerando diferentes valores de α-níveis. Para o caso clássico, ou seja, sem incertezas, em que $\alpha = 1$, tem-se que $\tilde{\beta}^{1,0}_{\text{inf}} = \tilde{\beta}^{1,0}_{\text{sup}} = 0,50$, $\overline{x}_{\text{inf}} = \overline{x}_{\text{sup}} = 2,00$ e $\psi(\tilde{\beta}^{1,0}_{\text{inf}}) = \psi(\tilde{\beta}^{1,0}_{\text{sup}}) = 0,72$. Tomando como exemplo, para $\alpha = 0,2$, tem-se o intervalo do limite superior da probabilidade de ruína $[0,61,\ 0,84]$ e o intervalo de valor médio da indenização $[1,73,\ 2,38]$. Nota-se que quanto menor a incerteza referente a β, ou seja, quanto maior o valor de α, menor a incerteza quanto ao valor do limite superior da probabilidade de ruína e ao valor médio da indenização ($\bar{x}$).

Tabela 1: Resultados obtidos para o limite superior da probabilidade de ruína.

α	$\tilde{\beta}^\alpha_{\text{inf}}$	$\tilde{\beta}^\alpha_{\text{sup}}$	$\psi(\tilde{\beta}^\alpha_{\text{inf}})$	$\psi(\tilde{\beta}^\alpha_{\text{sup}})$	$\overline{x}_{\text{inf}}$	$\overline{x}_{\text{sup}}$
0,0	0,40	0,60	0,59	0,88	1,67	2,50
0,2	0,42	0,58	0,61	0,84	1,73	2,38
0,6	0,46	0,54	0,66	0,78	1,85	2,18
0,8	0,48	0,52	0,69	0,75	1,92	2,08
1,0	0,50	0,50	0,72	0,72	2,00	2,00

Fonte: Elaboração própria do autor.

Referências

[1] Barros, L. C.; Bassanezi, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. 3. ed. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2015.

[2] Dickson, D. C. M. *Insurance Risk and Ruin*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.