

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Um método do tipo Lagrangeano-Euleriano aplicado a uma lei de balanço escalar com fluxo descontínuo e termo fonte de Dirac

Diego Soares Monteiro da Silva<sup>1</sup>

Universidade Federal Fluminense, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, MCCT, Volta Redonda, RJ

Panters Rodríguez-Bermúdez<sup>2</sup>

Universidade Federal Fluminense, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, MCCT, Volta Redonda, RJ

Diomar Cesar Lobão<sup>3</sup>

Universidade Federal Fluminense, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, MCCT, Volta Redonda, RJ

Gustavo Benitez Alvarez<sup>4</sup>

Universidade Federal Fluminense, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, MCCT, Volta Redonda, RJ

**Resumo.** Neste trabalho usa-se o esquema de diferenças finitas Lagrangeano-Euleriano para uma lei de balanço que modela um escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em um meio poroso, com um termo de fonte singular do tipo  $\delta$  de Dirac que representa uma injeção pontual. Assume-se que o escoamento acontece na direção vertical considerando efeitos gravitacionais, ao mesmo tempo que efeitos de pressão capilar são negligenciados. A presença do termo fonte  $\delta$  de Dirac implica em uma descontinuidade (na variável espacial) da função de fluxo, fato que dificulta a implementação numérica, tanto pela própria descontinuidade quanto pela necessidade de regularizar convenientemente a função  $\delta$ .

**Palavras-chave.** Lei de Balanço, Meios Porosos, Problema de Riemann, Fluxo Descontínuo,  $\delta$ -Dirac, Esquema Lagrangeano-Euleriano.

## 1 Introdução

Os sistemas de Leis de Conservação descrevem uma variedade de fenômenos físicos relacionados à transporte de fluidos [2,7,9,11]. Diversos problemas presentes na engenharia de petróleo podem ser modelados por estes sistemas ou equações escalares, um exemplo é a recuperação avançada do petróleo, a qual corresponde a maior etapa de vida útil de um

---

<sup>1</sup>diego\_smonteiro@hotmail.com

<sup>2</sup>pantersrb@id.uff.br

<sup>3</sup>lobaodiomarcasar@yahoo.com

<sup>4</sup>benitez.gustavo@gmail.com

reservatório e, conseqüentemente, a maior parte do óleo produzido mundialmente. Assim, existe um interesse tanto do ponto de vista energético, quanto ambiental em se estudar tais equações que descrevem este processo de recuperação [2, 9, 10].

Deseja-se estudar o escoamento bifásico unidimensional considerando um termo de fonte singular (delta de Dirac). A ação deste produz também uma descontinuidade na função de fluxo. Tanto o termo singular, quanto a descontinuidade representam dificuldades numéricas que a maioria dos métodos convencionais de diferenças finitas não conseguem resolver de maneira adequada. Assim, usa-se uma regularização conveniente do termo fonte  $\delta$  ([5]) e um fluxo numérico que seja apropriado para funções de fluxo descontínuas. Utiliza-se um método Lagrangeano-Euleriano [11] próprio para leis de balanço, o qual é capaz de conservar as propriedades de equilíbrio entre o fluxo e o termo fonte, isto é, um esquema "well-balanced" [11].

## 2 O Modelo

O escoamento bifásico para fluidos em meios porosos pode ser modelado por uma lei de balanço de massa e pela lei de Darcy [2]. Considere para o desenvolvimento do modelo deste trabalho a presença da gravidade e um termo de fonte do tipo delta de Dirac, que representa uma injeção pontual e instantânea em  $z = 0$ .

São consideradas as seguintes hipóteses para o desenvolvimento do modelo, o meio poroso é homogêneo; o escoamento é isotérmico; a porosidade da rocha é constante; os fluidos ocupam totalmente o meio poroso; as duas fases são imiscíveis; efeitos de compressibilidade dos fluidos e efeitos de pressão capilar entre as fases são negligenciados. Assim, matematicamente temos a equação de balanço de massa para cada fase  $i = w, o$  :

$$\frac{\partial(\phi\rho_i s_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial z} = Q_i, \quad (1)$$

com o termo fonte  $Q_i$  definido por:

$$Q_i = \rho_i q_i \delta(z). \quad (2)$$

onde,  $w$  e  $o$  são as fases da água e do óleo, respectivamente,  $\phi$  representa a porosidade,  $\rho_i$ ,  $s_i$ ,  $v_i$ , representam a densidade, saturação e velocidade de Darcy da fase  $i$ , respectivamente [2, 9, 10],  $q_i$  é uma constante positiva ( que representa uma taxa de injeção pontual para cada fase), o termo fonte contém a "função  $\delta$  de Dirac" e  $z$  é a variável espacial cujo eixo positivo aponta para baixo, portanto na presente convenção, ondas com velocidades positivas viajam para baixo, enquanto ondas com velocidades negativa para cima e  $t$  é a variável temporal.

A lei de Darcy para cada fase  $i = w, o$ :

$$v_i = -K \frac{k_i}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i g e_z). \quad (3)$$

onde,  $K$  representa a permeabilidade absoluta da rocha,  $k_i$ ,  $\mu_i$ ,  $p_i$  representam a permeabilidade relativa, viscosidade e pressão da fase  $i$ , respectivamente. O termo  $g$  é aceleração

da gravidade e  $e_z$  um vetor unitário com sentido positivo para baixo. Nota-se que a porosidade da rocha e as densidades das fases são consideradas constantes. Fazendo a soma das equações em (1) para a fase do óleo ( $i = o$ ) e da água ( $i = w$ ) e integrando em  $z$ , obtém-se a seguinte expressão para a velocidade total de Darcy:

$$v(z) = qH(z) + d, \tag{4}$$

onde  $H(z)$  é a função de Heaviside, definida como:  $H(z) = 0$  se  $z < 0$ ,  $H(z) = 1$  se  $z > 0$ . E  $q = \sum q_i$  e  $d$  uma constante de integração.

Considere as equações de (1)-(4) e após realizar alguns cálculos e um processo de adimensionalização similar ao realizado em [9] obtém-se a equação:

$$\frac{\partial(s_w)}{\partial t} + \frac{\partial F_w(z, s_w)}{\partial z} = q_w \delta(z). \tag{5}$$

Com função de fluxo:

$$F_w(z, s_w) = \frac{\frac{[qH(z) + d]s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_w^2(1 - s_w)^2 \rho_{wo}}{\mu_w \mu_o}}{\frac{(s_w)^2}{\mu_w} + \frac{(1 - s_w)^2}{\mu_o}}, \tag{6}$$

sendo  $\rho_{wo} = \rho_w - \rho_o$ . Note a descontinuidade do fluxo em  $z = 0$ .

### 3 Um esquema Lagrangeano-Euleriano

Segundo [1,6,11], uma das questões chave na resolução numérica de problemas de Cauchy, onde a equação diferencial é uma lei de balanço do tipo (5), é a presença de estados estacionários na solução. Algumas estratégias não preservam os estados estacionários discretos [6], por exemplo, aqueles que utilizam fluxo numérico tipo Godunov num método de volumes finitos e acoplam diferenças centradas para o termo fonte [6]. Outra alternativa como o chamado “splitting” que decompõe os operadores para fluxo e termo fonte, também não é capaz de preservar os estados estacionários [6].

Devido a estas dificuldades esquemas conhecidos como “well-balanced” têm sido propostos [8,11]. O método utilizado, neste trabalho, é baseado em [11] que desenvolveu uma nova classe de esquemas Lagrangeanos-Eulerianos tipo diferenças finitas, que apresenta a propriedade para ser “well-balanced”.

Para uma lei de balanço na forma abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = Q(s), \text{ em } \Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ s(z, 0) = s_0(z), \end{cases} \tag{7}$$

em [11] foi proposto o seguinte esquema de diferenças finitas na forma Lagrangeana-Euleriana:

$$S_j^{n+1} = \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h} \left( F(z_{j+1}, S_{j+1}^n) - F(z_{j-1}, S_{j-1}^n) \right) + \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{h}{2} + g_j^n k \right) \int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt + \frac{1}{h} \left( \frac{h}{2} - g_j^n k \right) \int \int_{D_j^n} Q(s(z, t)) dz dt \right], \quad (8)$$

onde  $(S_j^n)$  é a solução numérica numa malha  $(\Delta z, \Delta t)$ ,  $D_j^n$  é um certo volume de controle,  $g_j^n$  são linhas de rastreamento exatas das partículas de fluidos que aproximam as quantidades não-lineares  $F(s)/s$ , para detalhes ver [11]. A condição para estabilidade numérica é dada para CFL:

$$CFL \leq \frac{\max\{\max_j\{F'(S_j)\}, \max\{g_j^n\}\}k}{h} \leq \frac{2^{1/2}}{2}. \quad (9)$$

As funções  $F(z_{j-1}, S_{j-1}^n)$  e  $F(z_{j+1}, S_{j+1}^n)$  são os fluxos descontínuos associados a consistência do fluxo numérico dado por (10) e assume que  $\int \int_{D_j^n} Q(s) dz dt < \infty$  para todo  $j$ .

$$F_j^n = F(z_j, S_j^n) = \begin{cases} f(S_j^n), & j < 0, \\ \frac{1}{2}[f(S_j^n) + h(S_j^n)] + \frac{1}{2}\{f_{max}, h_{min}\}, & j = 0, \\ h(S_j^n), & j > 0, \end{cases} \quad (10)$$

onde,  $f(S_j^n)$  e  $h(S_j^n)$  são as funções de fluxo numérica a esquerda de  $j = 0$  e a direita, respectivamente. Já  $f_{max} = f(\max\{s_f^*, S_1^n\})$  e  $h_{min} = h(\min\{s_h^*, S_{-1}^n\})$ , sendo  $s_f^*$  e  $s_h^*$  os máximos de  $f$  e  $h$ , nessa ordem.

Para os termos do tipo  $\int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt$ , pode-se utilizar métodos numéricos de integração para obter uma aproximação dos mesmos [11] e estão presentes alguns métodos tais como, método dos trapézios e do ponto médio. Para este último, tem-se que:

$$\int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt \simeq khQ(z_j^n + \frac{1}{2}(g_j^n k + h), t^n + \frac{k}{2}). \quad (11)$$

### 3.1 Discretização do termo fonte delta de Dirac

Segundo [5] a técnica de regularização numérica de termos singulares é muito importante em processos computacionais. Para o presente problema, torna-se importante substituir a distribuição  $\delta$  de Dirac por uma família de funções contínuas que possa ser usada na malha computacional. Assim, utiliza-se a seguinte “regularização”, que pode ser encontrada em [5]:

$$\delta_\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{z}{\epsilon}\right), & |z| \leq \epsilon = mh, \\ 0, & |z| > \epsilon = mh, \end{cases} \quad (12)$$

onde  $m$  é um número de células tomadas na malha,  $\varphi$  é função a ser escolhida tal que  $\delta_\epsilon \in C(\mathbb{R})$ , isto é,  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ . A escolha da função  $\varphi$  é feita de forma a que  $\delta_\epsilon(z)$  satisfaça uma condição de momento de ordem 2 [5]. Para isto, escolhe-se a função linear  $\varphi(\xi) = 1 - |\xi|$  e  $m \geq 1$ .

## 4 Solução Numérica para uma classe de Problemas de Riemann

Procura-se resolver uma classe de problemas de Riemann para o modelo proposto na seção 2. Assim, considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s_w) + \frac{\partial}{\partial z} F_w(z, s_w) = q_w \delta(z), em \Omega \\ s_0(z, 0) = \begin{cases} s_l, z < 0, \\ s_r, z > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

onde,  $F_w(z, s_w)$  é dada por (6) e  $s_l, s_r$  correspondem os estados iniciais a esquerda e a direita, respectivamente. É importante destacar que o código computacional usado para obter a solução foi validado previamente utilizando outras equações mais simples cujas soluções são conhecidas em literatura, como a de Buckley-Leverett e outras.

Na Figura 1 encontram-se quatro exemplos de soluções numéricas obtidas com o auxílio do esquema Lagrangeano-Euleriano e da regularização do termo fonte em (12). A estrutura das soluções de Riemann em todos os casos apresentados mostram a existência de uma onda de choque estacionária separando as soluções em dois grupos de ondas, um grupo viajando com velocidade positiva para baixo e outro grupo viajando com velocidade negativa para cima no reservatório. Os grupos de ondas são compostos por sequências de ondas elementares como choques, rarefações ou estados de saturação constante.

Por exemplo na Figura 1-(a) a solução é formada apenas por ondas viajando com velocidades positivas, tem um choque estacionário em  $z = 0$  separando os estados de saturação constantes inicial esquerdo  $s_l = 1$  e intermediário  $s_m = 0.72$ , logo tem um choque com velocidade positiva separando  $s_m$  de  $s_r = 0.1$ . Na Figura 1-(b) a solução tem um choque estacionário em  $z = 0$  conectando os estados  $s_l = 0.5$  de  $s_m = 0.32$ , seguido de uma rarefação que contém velocidades no intervalo  $[0, 0.58]$ , logo depois tem-se um choque adjacente a rarefação anterior até o estado  $s_r = 1$ . Na Figura 1-(c) a solução está formada pela seguinte sequência de ondas: o estado constante inicial esquerdo  $s_l = 1$ , seguido de uma onda de choque com velocidade negativa  $\sigma = -0.25$ , seguido de uma rarefação adjacente ao choque anterior contendo velocidades no intervalo  $[-0.25, 0]$ , seguido de um choque estacionário em  $z = 0$ , seguido de um estado de saturação constante  $s_w = 0.45$ , seguido de um choque com velocidade positiva  $\sigma = 0.6$  (tal vez precedido de uma pequena rarefação). A sequência de ondas da Figura 1-(d) é análoga ao da Figura 1-(a). Em todos os quatro casos analisados as soluções apresentam sequências de ondas de acordo com o esperado pelas soluções semianalíticas entrópicas obtidas em [3,4] através de uma extensão da construção de Oleinik para o nosso problema.

## 5 Conclusões

Foi aplicado de um esquema Lagrangeano-Euleriano a um problema com origem na engenharia de petróleo. Em termos gerais o método apresenta bom desempenho sendo capaz de capturar as ondas de choques e rarefação, assim como as ondas estacionárias produzidas pela descontinuidade no fluxo. O método também resultou efetivo no tratamento do

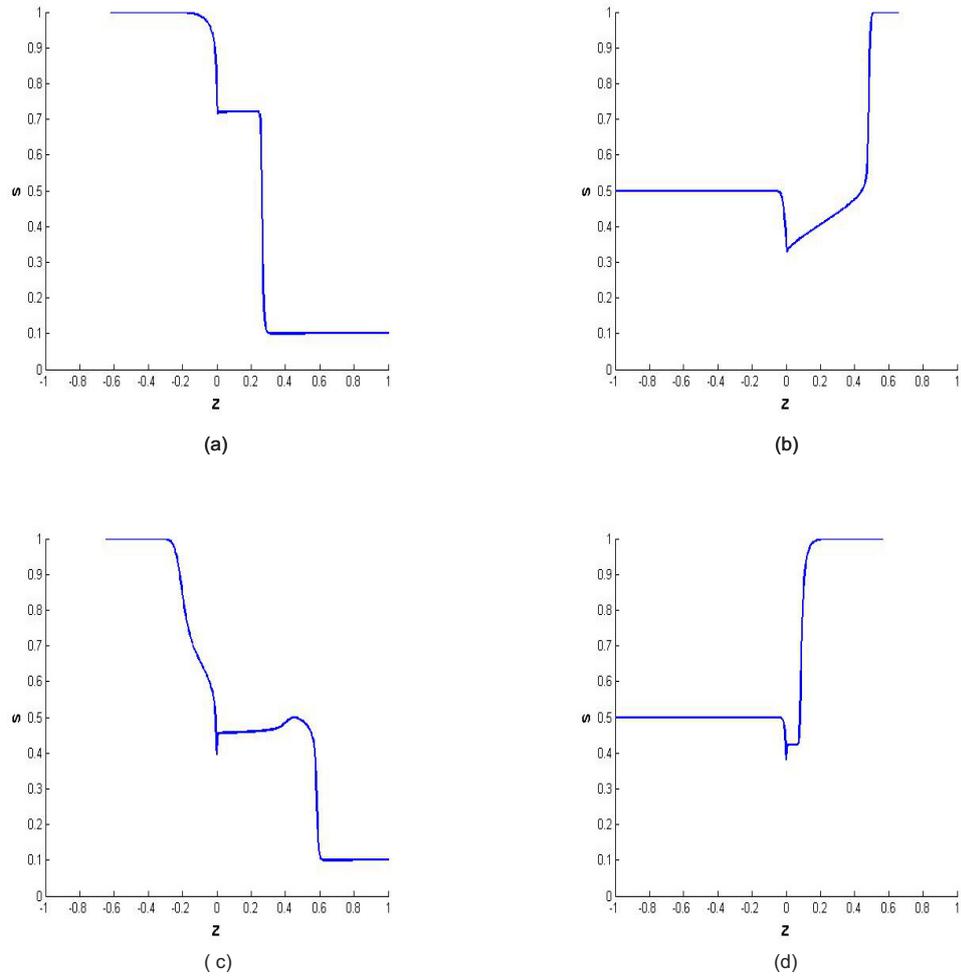


Figura 1: Em todas as figuras utiliza-se os mesmos parâmetros,  $\mu_w = \mu_o = 1, d = 0.15, q = 0.1$  e  $q_w = 0.01$ . Nas figuras (a) e (b)  $\rho_{wo} = -0.9$  e nas figuras (c) e (d)  $\rho_{wo} = 0.9$ . Em todos os casos  $CFL = 0,68, t = 1, \text{ nodos} = 513$ .

termo de fonte fortemente singular em forma de delta de Dirac, onde a regularização tem importante papel.

## Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pela concessão de bolsa de estudos a Diego Soares Monteiro da Silva. Agradecemos ao professor Eduardo Abreu e ao pesquisador Jonh Perez (IMECC-UNICAMP) por todas as profícuas ideias dadas ao trabalho.

## Referências

- [1] Adimurthi, J. Jaffré, and G.D.V. Gowda; Godunov-type methods for conservation laws with a flux function discontinuous in space. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol.42, 2005, pp.179-208.
- [2] Z. Chen, G. Huan, and Ma Yu. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Philadelphia: SIAM, 2006.
- [3] D. S. M. Silva; Soluções de Riemann para um escoamento bifásico com fonte de Dirac em um meio poroso- Dissertação de mestrado, MCCT, em preparação.
- [4] D.S.M. Silva, P. Rodríguez-Bermúdez, D. C. Lobão, and G. B. Alvarez; Vertical two-phase flow in porous media under the action of a Dirac source term, artigo em preparação.
- [5] B. Engquist, A.K. Tornberg, and R. Tsai; Discretization of Dirac delta functions in level set methods. *Journal Computational Physics*. Vol. 207, 2005, pp.28-51.
- [6] K.H. Karlsen, S. Mishra, and N.H. Risebro; Well-balanced schemes for conservation laws with source terms based on a local discontinuous flux formulation. *Mathematics of Computation*. Vol.78,2008, pp.55-78.
- [7] R.J. LeVeque; *Numerical methods for conservation laws*, volume 132. Springer, 1992.
- [8] S. Mancuso; Métodos Numéricos euleriano-lagrangeanos para leis de conservação . Ph.D.Thesis, UERJ, 2008.
- [9] P. Rodríguez-Bermúdez; Buoyancy Driven Three-Phase Flow in Porous Media. Ph.D Thesis, IMPA, 2010.
- [10] P. Rodriguez-Bermudez, Dan Marchesin . Riemann Solutions for vertical flow of three phases in porous media:simple cases. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, v. 10, p. 335-370, 2013.
- [11] J. A. P. Sepúlveda; Lagrangian-Eulerian approximate methods for balance laws and hyperbolic conservation laws .Ph.D. Thesis, UNICAMP, 2015.