Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Convergência em $H(\mathrm{div}, \Omega)$ para uma estratégia de recuperação do fluxo a partir do método Híbrido Primal

Giovanni Taraschi[1]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP
Maicon Ribeiro Correa[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

Neste trabalho estudamos uma estratégia de pós-processamento local para a aproximação do fluxo no contexto de problemas diferenciais elípticos de segunda ordem. Para isso consideramos o seguinte problema modelo, baseado na equação de Poisson

$$-\operatorname{div}(\mathcal{K}\,\nabla u) = f \qquad \text{em} \quad \Omega \tag{1a}$$

$$u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{1b}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, convexo e com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz contínua, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ e $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\boldsymbol{x})$ é um tensor simétrico e uniformemente positivo definido.

No contexto do problema modelo (1), em muitas aplicações é necessário obter aproximações em $H(\mathrm{div}, \Omega)$ para o fluxo, definido por $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}\,\nabla u$. Este é o caso da modelagem de escoamentos em meios porosos, onde obter aproximações precisas $\boldsymbol{\sigma}_h \in H(\mathrm{div})$ para o fluxo é fundamental para resolver o problema de transporte associado [3].

Dentre os muitos métodos de elementos finitos capazes de resolver o problema (1), estamos interessados no Método Híbrido Primal (MHP). Neste método, proposto originalmente em [5] e posteriormente analisado em [6], o espaço de busca contém funções descontínuas nas fronteiras entre elementos vizinhos e, em contra partida, é adicionada uma nova variável $\lambda_h$ relacionada aos multiplicadores de Lagrange.

Dada uma discretização $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ do domínio $\Omega$, em [6] é demonstrado que a variável $\lambda_h$ possui significado físico, podendo ser interpretada como uma aproximação para o fluxo normal sobre as fronteiras dos elementos $K \in \mathcal{T}_h$, isto é

$$\lambda_h \approx -\nabla u \cdot \mathbf{n}^{\partial K}|_{\partial K} \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h, \tag{2}$$

com $\boldsymbol{n}^{\partial K}$ denotando a normal unitária exterior à fronteira $\partial K$ do elemento $K$.

Baseado na interpretação física dada pela equação (2), em [4] é desenvolvida uma estratégia para aproximar o fluxo $\boldsymbol{\sigma}$ a partir da solução Híbrida Primal. Essa estratégia consiste em um pós-processamento dado por: Obtido o par $(u_h, \lambda_h)$ solução híbrida primal para o problema modelo (1), é construído um único $\boldsymbol{\sigma}_h \in RT_m(\Omega)$ tal que para cada $K \in \mathcal{T}_h$

$$\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{n}^{\partial K} = \lambda_h, \qquad \text{sobre } \partial K, \tag{3a}$$

$$\int_K (\boldsymbol{\sigma}_h + \mathcal{K}\,\nabla u_h) \cdot \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{dx} = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1). \tag{3b}$$

[1]g168763@dac.unicamp.br
[2]maicon@ime.unicamp.br

 

Aqui $RT_m(\Omega)$ denota os espaços de Raviart-Thomas de ordem $m$, descritos em [2] e

$$\boldsymbol{\Psi}_m(K) = \begin{cases} P_{m-1}(K) \times P_{m-1}(K), \text{ se } K \text{ é triangular,} \\ DF_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\tau}} \circ F_K^{-1} \ : \ \hat{\boldsymbol{\tau}} \in P_{m-1,m}(\hat{K}) \times P_{m,m-1}(\hat{K}), \text{ se } K \text{ é quadrilateral,} \end{cases} \tag{4}$$

onde $F_K$ é o mapeamento bijetivo que mapeia o elemento padrão $\hat{K}$ no elemento geométrico $K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}$, $DF_K$ é a matriz Jacobiana de $F_K$ e $JF_K$ o seu determinante. Denotamos também por $P_r(K)$ o espaço dos polinômios sobre $K$ de grau total até $r$ e por $P_{r,s}(\hat{K})$ o espaço dos polinômios sobre $\hat{K}$ de grau até $r$ na primeira coordena e até $s$ na segunda.

É demonstrado em [4] que o fluxo aproximado $\boldsymbol{\sigma}_h$ obtido por (3) pertence ao espaço $H(\mathrm{div}, \Omega)$, apesar de ser gerado localmente. Além disso, assumindo que a solução exata para o problema (1) seja suficientemente regular, é desenvolvida a análise de convergência da estratégia na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, pela qual a seguinte estimativa para o erro é obtida

$$||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{0,\Omega} \leq Ch^{m+1}(|\boldsymbol{\sigma}|_{r,K} + |u|_{r+1,K}), \tag{5}$$

onde $h$ é o máximo dos diâmetros dos elementos de $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ e $C$ é uma constante independente de $h$.

Neste trabalho desenvolvemos também a análise de convergência da estratégia definida por (3) na norma de $H(\mathrm{div}, \Omega)$, algo que não foi trabalhado no artigo original. Para isso usamos resultados mais gerais, demonstrados em [1], sobre a aproximação por elementos finitos em $H(\mathrm{div}, \Omega)$ para malhas quadrilaterais gerais.

Por fim, foi realizada uma série de experimentos numéricos com o objetivo de verificar as taxas de convergência previstas teoricamente. Os resultados numéricos encontrados concordam em totalidade com a análise desenvolvida, corroborando para a validação da mesma.

## Referências


[1] Arnold, D. N., Boffi, D. and Falk, R. S. Quadrilateral H (div) finite elements, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(6):2429-2451, 2005. DOI:10.1137/S0036142903431924

[2] Boffi, D., Brezzi, F. and Fortin, M. *Mixed finite element methods and applications, v. 44*. Springer, Heidelberg, 2013.

[3] Correa, M. R. and Loula, A. F. D. Stabilized velocity post-processings for Darcy flow in heterogeneous porous media, *Communications in numerical methods in engineering*, 23(6):461-489, 2007. DOI:10.1002/cnm.904

[4] Chou, S. H., Kwak, D. Y. and Kim, K. Y. Flux recovery from primal hybrid finite element methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2):403-415, 2002. DOI:10.1137/S0036142900381266

[5] Pian, T. H. and Tong, P. Basis of finite element methods for solid continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(1):3-28, 1969. DOI:10.1002/nme.1620010103

[6] Raviart, P. A. and Thomas, J. M. Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations, *Mathematics of computation*, 31(138):391-413, 1977. DOI:10.1090/S0025-5718-1977-0431752-8