

Relações entre Elementos Geométricos na Álgebra dos Quatérnios Duais com Aplicações na Robótica

Luiz A. Radavelli¹

Departamento de Engenharia Mecânica, Laboratório de robótica, UFSC, Florianópolis, SC

Daniel Martins²

Departamento de Engenharia Mecânica, Laboratório de robótica, UFSC, Florianópolis, SC

Edson R. De Pieri³

Departamento de Automação e Sistemas, Laboratório de robótica, UFSC, Florianópolis, SC

Roberto Simoni⁴

Centro de Engenharia da Mobilidade, UFSC, Joinville, SC

Resumo. Este artigo apresenta uma modelagem para as principais relações entre elementos geométricos na álgebra de Clifford $Cl_{0,3,1}^+$, isto é, na álgebra dos quatérnios duais. As definições das relações e interseções apresentam um padrão em sua forma e deixam a modelagem de algumas aplicações na robótica analiticamente mais compactas e diretas. Ademais, a liberdade de escolha entre os elementos geométricos disponíveis torna a modelagem cinemática mais flexível que as abordagens tradicionais, criando novas ferramentas para analisar as tarefas nos ambientes que utilizam manipuladores robóticos. Exemplos serão utilizados para ilustrar algumas possíveis aplicações.

Palavras-chave. robótica, cinemática, álgebras de Clifford, quatérnios

1 Introdução

O avanço tecnológico foi responsável por um processo de automação dos meios de produção com o uso intenso de robôs, substituindo, em parte, o trabalho humano, ou realizando parte das tarefas repetitivas, inseguras ou insalubres. A robotização foi responsável por melhorias na produtividade e qualidade de produção. No entanto, surgiram novos desafios tecnológicos como o controle preciso dos sistemas robóticos necessitando uma melhor modelagem cinemática dos dispositivos que compõe o sistema.

Os robôs manipuladores são os dispositivos robóticos mais utilizados na indústria, e constituem-se, basicamente, de *juntas*, *elos*, e de um *efetuador final* (E-F), que é responsável pela execução de diferentes tarefas [1].

¹luiz.radavelli@gmail.com

²danielemc@gmail.com

³edopieri@gmail.com

⁴roberto.emc@gmail.com

A análise cinemática é necessária para o controle de qualquer tarefa e pode ser modelada por meio de diversas ferramentas matemáticas como a álgebra matricial, álgebra vetorial, diferenciação, entre outras [1, 6, 9].

Como forma alternativa de abordar a cinemática de manipuladores, *Yang e Freudenstein* [10] incluíram os números duais na modelagem das transformações de corpos rígidos (rotações e translações), o que promoveu investigações paralelas aos métodos mais comuns na análise cinemática. Os números duais permitem novas formas de representações para as funções reais, além de transformar quatérnios em quatérnios duais, todos casos particulares de álgebras de Clifford [4].

Com auxílio dos quatérnios duais é possível representar um E-F por diversos elementos, os quais podem ser utilizados na análise cinemática como forma alternativa para a solução de problemas relacionados a uma melhor representação da tarefa e de sua execução.

Neste artigo, o principal objetivo é apresentar algumas relações entre os elementos geométricos na álgebra dos quatérnios duais, deixando a análise cinemática ainda mais robusta e flexível do que já foi percebido em [5], oferecendo ideias para analisar e resolver a cinemática de manipuladores com ênfase em tarefas industriais robotizadas.

2 Elementos nos Quatérnios duais

Um quatérnio dual h é um elemento de \mathbb{R}^8 que envolve dois quatérnios $q_1 = w_1 + x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} = w_1 + \vec{v}_1$ e $q_2 = w_2 + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} = w_2 + \vec{v}_2$, onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são as unidades dos quatérnios, $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = \vec{i}\vec{j}\vec{k} = -1$:

$$h = (w_1 + x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) + \varepsilon(w_2 + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = w_1 + \vec{v}_1 + \varepsilon(w_2 + \vec{v}_2),$$

com ε a unidade dual, $\varepsilon^2 = 0$. A álgebra (não comutativa) dos quatérnios duais é isomorfa à álgebra de *Clifford* $Cl_{0,3,1}^+$ e integraliza o operador de deslocamento, dado pela equação (12), e vários elementos geométricos como elementos básicos nessa álgebra. Para dois quatérnios duais $h_1 = q_1 + \varepsilon q_2$ e $h_2 = p_1 + \varepsilon p_2$, tem-se $h^* = q_1^* + \varepsilon q_2^*$, $\bar{h} = q_1 - \varepsilon q_2$, $\bar{h}^* = q_1^* - \varepsilon q_2^*$, $h \pm h_2 = (q_1 \pm p_1) + \varepsilon(q_2 \pm p_2)$, $h_1 h_2 = (q_1 p_1) + \varepsilon(q_1 p_2 + q_2 p_1)$, e o produto entre quatérnios, em sua versão vetorial, $q_1 q_2 = w_1 w_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + w_1 \vec{v}_2 + w_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Maiores detalhes sobre a álgebra dos quatérnios e quatérnios duais podem ser encontrados em [4, 7] e [5].

Os pontos (P), vetores (V), planos (Π), retas (L) e helicoides ($\$$) foram definidos em [4, 5] e apresentados nas equações em (1):

$$\begin{aligned} P &= 1 + \vec{0} + \varepsilon(0 + \vec{p}), & V &= 0 + \vec{0} + \varepsilon(0 + \vec{v}), & \Pi &= 0 + \vec{n} + \varepsilon(-d + \vec{0}), \\ L &= 0 + \vec{l} + \varepsilon(0 + \vec{m}), & \$ &= 0 + \vec{s} + \varepsilon(0 + \vec{m} + \lambda \vec{s}), \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\vec{p} = \vec{v}$ constitui as coordenadas do ponto/vetor no \mathbb{R}^3 , \vec{l} é o vetor diretor e \vec{m} é o momento da reta L (similarmente para o helicóide, com vetor diretor \vec{s} e momento \vec{m}), λ o passo helicoidal [6], \vec{n} o vetor normal do plano que dista d à origem do sistema de coordenadas referencial. O momento \vec{m} é dado pelo produto externo entre o vetor posição da reta/helicóide e o vetor diretor. Na reta $\vec{m} = \vec{l}_0 \times \vec{l}$ e no helicóide, $\vec{m} = \vec{s}_0 \times \vec{s}$.

A representação de pontos, retas e planos também foi investigada em [2], [8], [3] e [5] diferenciando-se, principalmente, pela álgebra utilizada para definir esses elementos.

As transformações de rotação e translação de pontos, vetores, retas, helicoides e planos, desenvolvidos em [5], são definidas pela equação (2):

$$\xi' = h \xi \tilde{h}, \quad \text{onde} \quad \tilde{h} = \begin{cases} \overline{h^*}, & \text{se } \xi \leftarrow P, V, \text{ ou } \Pi; \\ h^*, & \text{se } \xi \leftarrow L, \text{ ou } \$. \end{cases} \quad (2)$$

3 Relações e interseções dos elementos

Nesta seção apresentamos algumas relações e interseção entre elementos, observando o padrão com que elas são dadas. As análises podem ser aplicadas para outros casos.

Interseção entre reta e plano

Considere a reta $L = 0 + \vec{l} + \varepsilon(0 + \vec{m})$ e o plano $\Pi = 0 + \vec{n} + \varepsilon(-d + \vec{0})$. Caso a reta L não seja paralela ao plano Π , $L \cap \Pi = P$. Neste caso valem as relações na equação (3):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{p} = -d \\ \vec{p} \times \vec{l} = \vec{m} \end{array} \right\} \implies \vec{n} \times (\vec{p} \times \vec{l}) = \vec{p}(\vec{n} \cdot \vec{l}) - \vec{l}(\vec{n} \cdot \vec{p}) = -k\vec{p} + d\vec{l}, \quad (3)$$

com $k \in \mathbb{R}$, $k\vec{p} = \vec{n} \times \vec{m} + d\vec{l}$. Pelas observações nas equações em (4),

$$\begin{aligned} \Pi \bar{L} &= \vec{n}\vec{l} + \varepsilon(-\vec{n}\vec{m} - d\vec{l}) = -\vec{n} \cdot \vec{l} + \vec{n} \times \vec{l} + \varepsilon(\vec{n} \cdot \vec{m} - \vec{n} \times \vec{m} - d\vec{l}), \\ L \Pi &= \vec{l}\vec{n} + \varepsilon(\vec{m}\vec{n} - d\vec{l}) = -\vec{l} \cdot \vec{n} + \vec{l} \times \vec{n} + \varepsilon(-\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m} \times \vec{n} - d\vec{l}), \end{aligned} \quad (4)$$

concluimos que o ponto de interseção $P = 1 + \vec{0} + \varepsilon(0 + \vec{p})$ é dado na equação (5):

$$P = \frac{1}{2k} (\Pi \bar{L} + L \Pi) = 1 + \vec{0} + \varepsilon(0 + \vec{n} \times \vec{m} + d\vec{l}), \quad k = -\vec{n} \cdot \vec{l}. \quad (5)$$

Interseção entre planos

Sejam dois planos $\Pi_1 = 0 + \vec{n}_1 + \varepsilon(-d_1 + \vec{0})$ e $\Pi_2 = 0 + \vec{n}_2 + \varepsilon(-d_2 + \vec{0})$. Caso $\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = L$ que tem vetor diretor $\vec{l} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ e momento definido na equação (6)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \cdot \vec{l}_0 = -d_1 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{l}_0 = -d_2 \end{array} \right\} \implies \vec{m} := \vec{l}_0 \times \vec{l} = \vec{l}_0 \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = d_1\vec{n}_2 - d_2\vec{n}_1. \quad (6)$$

Pelas observações nas equações (7),

$$\begin{aligned} \Pi_1 \bar{\Pi}_2 &= n_1 n_2 + \varepsilon(d_2 \vec{n}_1 - d_1 \vec{n}_2) = -\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 + \varepsilon(d_2 \vec{n}_1 - d_1 \vec{n}_2), \\ \Pi_2 \bar{\Pi}_1 &= n_2 n_1 + \varepsilon(-d_2 \vec{n}_1 + d_1 \vec{n}_2) = -\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 - \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 - \varepsilon(d_2 \vec{n}_1 - d_1 \vec{n}_2), \end{aligned} \quad (7)$$

concluimos que a reta de interseção é dada pela equação (8):

$$L = \frac{1}{2} (\Pi_1 \bar{\Pi}_2 - \Pi_2 \bar{\Pi}_1) = 0 + \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 + \varepsilon(0 + d_2 \vec{n}_1 - d_1 \vec{n}_2). \quad (8)$$

Relações entre retas Para a maioria das aplicações, a interseção entre retas torna-se inviável, já que os movimentos de um robô definem retas reversas em quase sua totalidade. Deste modo, é mais conveniente descrever qual ou quais as condições para que ocorra a interseção entre duas retas. Estas condições entram como restrições à modelagem cinemática.

Considere duas retas $L_1 = 0 + \vec{l}_1 + \varepsilon(0 + \vec{m}_1)$ e $L_2 = 0 + \vec{l}_2 + \varepsilon(0 + \vec{m}_2)$, com ângulo α entre elas. Logo, $\cos(\alpha) = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2$. Seja g a distância entre as retas, a qual é dada pelo comprimento do vetor paralelo à normal comum das retas. Se \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores de posição onde ocorre a normal em L_1 e L_2 , respectivamente, então $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \parallel \vec{l}_1 \times \vec{l}_2$ e $\|Proj_{\vec{l}_1 \times \vec{l}_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\| = g$. O desenvolvimento dessa relação faz chegar $g \sin(\alpha) = \vec{l}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{l}_2 \cdot \vec{m}_1$. Portanto, a condição para a existência de interseção entre retas em quatérnios duais é que seja nula a parte dual do produto apresentado na equação (9) (observe que $\alpha \neq 0$ ou π):

$$\frac{1}{2}(L_1 L_2^* - L_2 L_1^*) = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \varepsilon(\vec{l}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{l}_2 \cdot \vec{m}_1). \quad (9)$$

4 Modelagem cinemática

Na análise cinemática de manipuladores estamos interessados em obter equações algébricas que relacionam a postura de um corpo rígido com os parâmetros das juntas atuadas do manipulador [6, 9]. A postura do E-F, denotada por \mathcal{E} e apresentada na equação (10), refere-se a orientação $R \in SO(3)$ e a posição $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{t} & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{t} & R \end{pmatrix}, \quad (10)$$

onde $R_{3 \times 3} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é a orientação e \vec{t} a posição do corpo em relação a um referencial \mathcal{G} adotado como fixo na modelagem.

Além disso, para cada junta ativa de um manipulador serial composto por n juntas (rotativas ou prismáticas) faz-se corresponder um operador de ${}^i H_j \in SE(3)$ correspondente à ação da junta no movimento do manipulador e cuja definição algébrica depende da técnica utilizada para a análise cinemática, ou pela metodologia de *Denavit-Hartenberg* ou por helicoides sucessivos [6, 9]. A composição dos operadores resulta no operador global que é responsável por representar a configuração dos corpos em movimento no sistema referencial \mathcal{G} . Vide Figura 1 (esquerda).

A análise cinemática fundamenta-se, portanto, na equação (11)

$$\mathcal{E}' = \left({}^{\mathcal{G}}H_1 {}^1H_2 \dots {}^{n-1}H_n {}^nH_{\mathcal{E}} \right) \mathcal{E} = {}^{\mathcal{G}}H_{\mathcal{E}} \mathcal{E}, \quad (11)$$

onde ${}^{\mathcal{G}}H_{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{G}}H_1 {}^1H_2 \dots {}^{n-1}H_n {}^nH_{\mathcal{E}}$ é o operador global. É comum incorporarmos o referencial \mathcal{G} à base do manipulador.

Uma representação alternativa para $SE(3)$ é dada por quatérnios duais. Uma rotação de magnitude θ radianos em torno de um eixo definido pelo vetor diretor unitário \vec{s} é

modelada por $h_R := \cos\frac{\theta}{2} + \vec{s}(\sin\frac{\theta}{2}) + \varepsilon 0 + \varepsilon \vec{0} = q + \varepsilon 0 + \varepsilon \vec{0}$ enquanto que uma translação ao longo do vetor \vec{t} é dada por $h_T := 1 + \vec{0} + \varepsilon 0 + \varepsilon \frac{\vec{t}}{2}$. Assim, um deslocamento (rotação seguida por translação) é definido como na equação (12)

$$h := h_T h_R = q + \varepsilon \frac{tq}{2}, \quad (12)$$

onde $q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{s}(\sin\frac{\theta}{2})$ e $t = 0 + \vec{t}$ são as componentes rotacional e translacional [4, 7].

Na álgebra dos quatérnios duais, os operadores que representam as juntas ${}^i H_j$ na equação (11) são substituídas por quatérnios duais na forma da equação (12), que possuem o mesmo significado que as matrizes homogêneas naquela modelagem. Além disso, como foi observado na equação (2), a equação para a análise cinemática é dependente do elemento escolhido.

Na modelagem por quatérnios duais é possível utilizar um conjunto de elementos geométricos para representar o E-F. A depender da aplicação, os elementos desse conjunto podem ser pontos, vetores, retas, helicoides ou planos. Além disso, é possível utilizar elementos geométricos de classes distintas para representar um E-F.

5 Aplicação na robótica

Utilizando a álgebra dos quatérnios duais, as definições de pontos, vetores, retas, helicoides, planos, condições de incidência, interseção ou outras relações, pode-se analisar e resolver a cinemática para diversas tarefas em robótica.

A soldagem executa sua tarefa sobre pontos específicos de uma superfície ou, mais geralmente, ao longo de uma trajetória. Vide Figura 1 (direita). A tarefa de soldagem pode ser modelada com auxílio de uma reta e um vetor em quatérnios duais. Uma reta é empregada para representar o E-F enquanto que o vetor é definido pela normal à trajetória. O vetor diretor de L é definido pelo oposto do vetor normal \vec{n} . Um vetor posição para a reta L pode ser tomado como o próprio ponto sobre a trajetória.

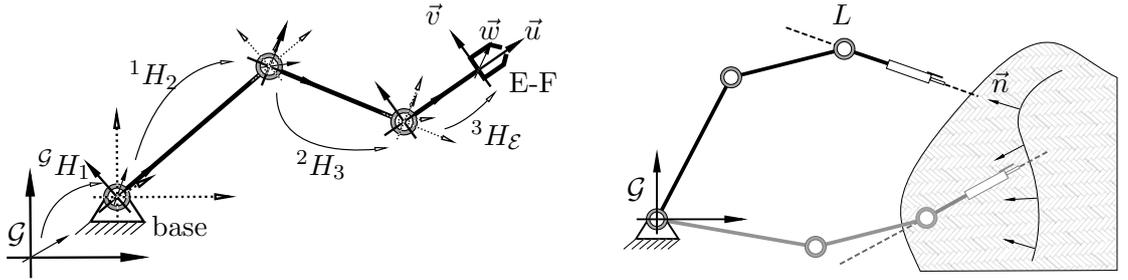


Figura 1: Frames em um manipulador (esquerda). Tarefa de soldagem (direita).

É importante ressaltar que tanto o vetor diretor de uma reta quanto o vetor normal de um plano devem ser unitários. Tais vetores servem como guia para a definição das retas que representam o E-F. O vetor \vec{n} é fixado pela trajetória da tarefa de solda enquanto que a definição do vetor \vec{l} pode ser flexibilizada, admitindo-se uma folga para a tocha de solda de um ângulo de $\pm\alpha^\circ$ em relação \vec{n} .

Para a tarefa de furação ou parafuzamento, vide Figura 2 (esquerda), conhecidos o plano tangente à superfície que se deseja realizar uma tarefa de furação/parafuzamento, o E-F tem sua configuração determinada pela reta definida como no caso da soldagem, considerando-se, agora, o vetor normal que define o vetor diretor da reta como sendo o vetor normal do plano.

Nas tarefas que utilizam a cooperação entre manipuladores, vide Figura 2 (direita), duas retas em cada E-F podem ser utilizadas. Uma das restrições incorporada às equações cinemáticas do sistema é que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Com isso, a interseção entre as retas resulta na posição da garra de execução da tarefa, que pode ser utilizada como parâmetro de referência para confirmação da realização da tarefa, bem como para analisar se tal ponto pertence aos espaços de trabalho dos manipuladores.

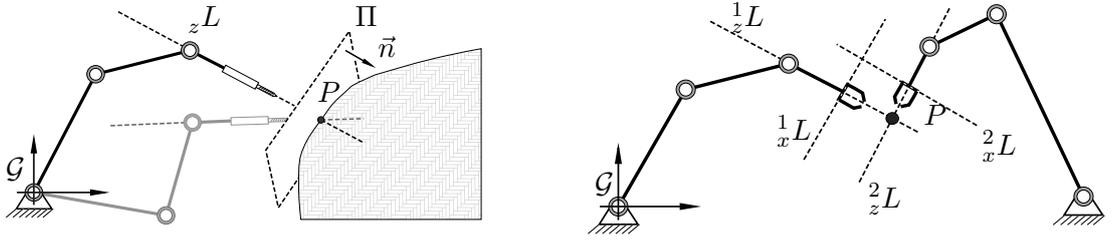


Figura 2: Tarefa de furação ou parafuzamento (esquerda). Sistema robótico cooperativo (direita).

6 Conclusões

Este artigo apresentou a modelagem para as interseções entre pontos/vetores, retas/helicoides e planos na álgebra dos quatérnios duais e destacou aplicações na robótica. Para integralizar o estudo do deslocamento desses elementos o artigo dos mesmos autores [5] deve ser investigado.

Para a grande maioria das relações entre os elementos geométricos a equação apresentou-se de forma padronizada, diferenciando-se apenas por uma questão de conjugação, que se faz necessária para balancear a não comutatividade do produto quaterniano e algumas propriedades da álgebra de Clifford. A investigação teve motivação em Selig [8], que utilizou a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,3,1}$ para definir alguns entes geométricos, alguns deles foram definidos por elementos de grau ímpar, outros por elementos de grau par. No entanto, em nosso artigo toda a abordagem foi tratada na subálgebra par $\mathcal{Cl}_{0,3,1}^+$ (isto é, na álgebra dos quatérnios duais), de modo que não se teve interferência dos elementos de grau ímpar da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,3,1}$, obtendo alguns resultados semelhantes e outros distintos em relação a [8].

Percebeu-se uma grande flexibilidade na modelagem cinemática com o auxílio da álgebra dos quatérnios duais e representação de elementos geométricos, a qual é acentuada ainda mais pelo fato de que não há limitação para a utilização de elementos geométricos, podendo-se utilizar mais elementos do que o mínimo necessário para descrever completamente a configuração do E-F. Por exemplo, ao invés de utilizar somente duas retas para

representar o E-F, pode-se utilizar duas retas e dois planos. A conveniência desse acréscimo deve ser analisado, pois acarretará na adição de (mais) restrições à análise cinemática. Essa ideia pode ser utilizada quando existem infinitas soluções para uma desejada configuração, de modo que o acréscimo de restrições refinará as soluções, chegando a resultados mais adequados. Os casos onde a interseção não é garantida (p.e. cooperação de robôs), a equação de interseção auxilia a modelagem, incorporando restrições ao problema.

Futuros trabalhos abrangerão as aplicações apresentadas, seguido de uma análise computacional para analisar a viabilidade e implementação de métodos que incluem as ferramentas desenvolvidas.

Agradecimentos

Ao Cnpq pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] J. Angeles. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. Springer International Publishing, Switzerland, 2014.
- [2] W. Blaschke. *Kinematik und quaternionen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [3] E. B. Corrochano and L. E. Falcón. Geometric algebra of points, lines, planes and spheres for computer vision and robotics. *Robotica*, 23:755–770, 2005.
- [4] L. A. Radavelli. Análise cinemática direta de robôs manipuladores via álgebra de Clifford e quatérnios. Dissertação de mestrado, UFSC, 2013.
- [5] L. A. Radavelli and E. R. De Pieri and D. Martins and R. Simoni. Points, lines, screws and planes in dual quaternions kinematics. In *Advances in Robot Kinematics*, Springer International Publishing, chapter 30, pages 285–293, 2014.
- [6] L. Sciavicco and L. Villani and G. Oriolo and B. Siciliano. *Robotics: Modelling, planning and control*. Springer-Verlag, London, 2009.
- [7] J. M. Selig. *Geometrical methods in robotics*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] J. M. Selig. Clifford algebra of points, lines and planes. *Robotica*, 18:545–556, 2000.
- [9] L. W. Tsai. *Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [10] A. T. Yang and F. Freudenstein. Application of dual-number quaternions to the analysis of the spatial mechanism. *AMSE Transactions Journal of Applied Mchanics*, 86:300–308, 1964.