

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Estudo Numérico de Caminhos Altamente Condutivos em Forma de Y para Arrefecimento de Corpos com Geração de Calor

Cássia C. Beckel<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS

Luiz A. O.Rocha<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS

Liércio A. Isoldi<sup>3</sup>

Escola de Engenharia, FURG, Rio Grande, RS

Elizaldo D. dos Santos<sup>4</sup>

Escola de Engenharia, FURG, Rio Grande, RS

**Resumo.** Este estudo numérico utiliza o método Design Construtal para reduzir os pontos quentes de um sistema com geração de calor uniforme por unidade de volume por condução. A ideia é facilitar o acesso do fluxo de calor através de vias de alta condutividade em forma de Y e a sua liberação para o ambiente. O objetivo é o de minimizar a máxima temperatura em excesso adimensional de todo o sistema (materiais de condutividade alta e baixa). A forma do sistema pode variar sujeita à duas restrições: o volume total e o volume das vias de alta condutividade. Os resultados mostram que, para o caso estudado a geometria tende para uma forma de V (isto é o tronco do corpo, sem geração de calor tende a diminuir na direção do dissipador de calor). Os resultados também demonstram a aplicabilidade do Design Construtal para a melhoria do desempenho térmico do sistema, por exemplo, a otimização de dois graus de liberdade ocasiona uma diminuição de 25% na máxima temperatura em excesso adimensional da melhor configuração quando ela é comparada com a pior configuração estudada.

**Palavras-chave.** Design Construtal, Geração de calor, Vias em forma de Y.

## 1 Introdução

Vários estudos tem sido realizados a fim de diminuir a temperatura de uma superfície, onde há geração de calor, utilizando-se apenas o mecanismo de difusão de calor. Arrefecimento de eletrônicos (resistores, transistores, diodos e capacitores), cujo objetivo é o de minimizar a temperatura máxima num dado volume finito considerando o calor gerado em cada ponto, têm sido amplamente estudados na literatura por [1-3].

---

<sup>1</sup>cassia.beckel@ufrgs.br

<sup>2</sup>luizrocha@mecanica.ufrgs.br

<sup>3</sup>liercioisoldi@furg.br

<sup>4</sup>elizaldosantos@furg.br

A lei Construtal pode ser concebida como uma generalização de uma tendência de todas as coisas fluírem ao longo de caminhos de resistência mínima: natureza e engenharia estão unidas na busca de uma melhor arquitetura fluxo. Esta lei tem sido utilizada para diversas aplicações em todos os domínios da geração de design e evolução, da biologia e física a organização social, a evolução da tecnologia, sustentabilidade e engenharia [4–6].

O primeiro trabalho nesta área foi apresentado por [7] que desenvolveu um design de arrefecimento constituído por uma placa quadrada com um material de condutividade térmica elevada inserido no seu centro. Fixando as áreas da placa e as vias de elevada condutividade, as dimensões foram otimizadas, a fim de conseguir a minimização da resistência térmica não-dimensional. Designs de vias de alta condutividade foram testados para outras geometrias, tais como as configurações em forma de X, Y e I [8–10], na literatura, concluindo que os mesmos princípios físicos encontrados na natureza para a determinação da forma e estrutura em sistemas de fluxo animados e inanimados podem ser empregados na engenharia para alcançar o melhor desempenho térmico.

Portanto, o presente trabalho destina-se a descobrir a configuração que facilita o fluxo de calor por condução a partir de uma placa com geração de calor para o ambiente, utilizando um caminho de alta condutividade térmica em forma de Y ligado a um ponto de baixa temperatura (dissipador de calor). Assume-se que o volume elementar quadrado que gera calor uniformemente por unidade de volume é arrefecido por um dissipador de calor à temperatura  $T_0$  que está localizado na borda do sistema. O estudo realizado expande as configurações estudadas por [10].

## 2 Modelo Matemático

Considere o corpo condutivo mostrado na Figura 1. Por simplificação, a configuração utilizada é bidimensional, com a terceira dimensão ( $W$ ) suficientemente longa em comparação com a altura ( $H$ ) e o comprimento ( $L$ ) do volume total. São inseridos caminhos condutivos em forma de Y compostos por um material de alta condutividade térmica ( $k_p$ ) na base e nos ramos e na região definida pelo trapézio, inseridos no corpo com condutividade térmica inferior ( $k$ ).

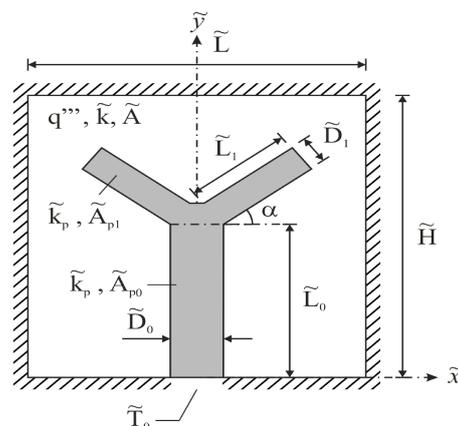


Figura 1: Áreas do domínio e as principais dimensões do corpo altamente condutor a ser analisado.

A corrente de calor gerada  $q'''(AW)$  é removida pelos dissipadores de calor localizados na borda do corpo à temperatura  $T_0$ . O trabalho consiste em calcular a máxima temperatura em excesso adimensional  $(T_{\max} - T_0)/(q'''A/k)$  e avaliar como a geometria ( $L_1/L_0$  e  $\alpha$ ) influencia na remoção da corrente de calor. Para isso, de acordo com o Design Construtal, duas restrições devem ser consideradas. São elas: a restrição da área total:

$$A = HL \tag{1}$$

e a restrição da área ocupada pelos materiais de alta condutividade:

$$A_p = L_0D_0 + \left( \frac{D_0 + (D_0 - 2X)}{2} \right) Y + 2L_1D_1 \tag{2}$$

Na Equação (2), o termo  $(D_0 - 2X)$  representa a linha superior do trapézio, que liga a haste e os ramos bifurcados (linha tracejada na Figura 1) e a variável “Y” é a altura do trapézio. Os termos que surgem na Equação (2) são dados por:

$$X = D_1 \cos(\beta) \tag{3}$$

$$Y = D_1 \sin(\beta) \tag{4}$$

onde:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \tag{5}$$

A razão entre as Equações (1) e (2) pode ser expressada pela fração de área  $\phi$ :

$$\phi = \frac{A_p}{A} \tag{6}$$

A análise que proporciona a máxima temperatura em excesso adimensional como uma função da geometria consiste em solucionar numericamente a equação da condução de calor para a região com geração de calor e baixa condutividade  $k$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \tag{7}$$

e para a região sem geração de calor e alta condutividade térmica:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} = 0 \tag{8}$$

As variáveis adimensionais do problema são:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{L}_0, \tilde{D}_0, \tilde{L}_1, \tilde{D}_1 = \frac{x, y, H, L, L_0, D_0, L_1, D_1}{A^{1/2}}, \quad \tilde{k}_p, \tilde{k} = \frac{(k_p, k)}{k} \tag{9}$$

As superfícies exteriores são adiabáticas e suas condições de contorno são:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{n}} = 0 \tag{10}$$

onde  $\tilde{n}$  são as superfícies isoladas. A condição de contorno na região  $(-\tilde{D}_0/2 \leq \tilde{x} \leq \tilde{D}_0/2; \tilde{y} = 0)$  que está em contato com o dissipador de calor é dada por:

$$\theta_0 = 0 \tag{11}$$

Já a máxima temperatura em excesso adimensional,  $\theta_{\max}$ , é definida por:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max} - T_0}{q'''A/k} \tag{12}$$

Com o problema totalmente formulado e a geometria definida, a máxima temperatura em excesso adimensional pode ser calculada com os parâmetros estabelecidos, variando os graus de liberdade estabelecidos para o problema.

### 2.1 Modelo Numérico

A função definida pela Equação (12) pode ser determinada através da solução numérica das equações de condução de calor (7) e (8) para o campo de temperatura em cada configuração assumida dependendo dos graus de liberdade estabelecidos. A malha apropriada é determinada através de sucessivos refinamentos, aumentando o número de elementos até que o critério  $|(\theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1})/\theta_{\max}^j| < 1,0 \times 10^{-4}$ , onde  $\theta_{\max}^j$  representa a máxima temperatura em excesso adimensional calculada com base na malha atual gerada e  $\theta_{\max}^{j+1}$  corresponde à máxima temperatura em excesso adimensional obtida considerando a malha gerada após o refinamento, onde o número de elementos triangulares é incrementado.

Para determinar a solução numérica das Equações (7) e (8) é utilizado um código de elementos finitos, baseado em elementos triangulares, desenvolvido em ambiente MatLab® [11], mais precisamente no PDE (partial-differential-equations) *Toolbox*. A Tabela 1 mostra como a independência de malha foi obtida. A malha independente para o problema, mostrada na Tabela 1 é composta por 138.624 elementos triangulares.

Tabela 1: Teste numérico a malha independente do número de elementos ( $\phi = 0, 2, H/L = 1, 0, \tilde{D}_0 = 0, 7, L_1/L_0 = 143, D_1/D_0 = 0, 14, \tilde{k}_p = 300$  e  $\alpha = 89^\circ$ ).

Número de elementos	$\theta_{\max}^j$	$ (\theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1})/\theta_{\max}^j $
2.166	0,041082	$3,1803 \times 10^{-3}$
8.664	0,041213	$9,4072 \times 10^{-4}$
34.656	0,041252	$2,6554 \times 10^{-4}$
138.624 <sup>(1)</sup>	0,041263	$7,3607 \times 10^{-5}$
554.496	0,041266	—

<sup>(1)</sup> malha independente

## 3 Resultados

No presente estudo, foi realizada uma avaliação do efeito da razão de aspecto  $L_1/L_0$  e do ângulo  $\alpha$  na máxima temperatura em excesso adimensional,  $\theta_{\max}$  no domínio mostrado

na Figura 1. Além disso, um processo de otimização geométrica foi aplicado através do método de busca exaustiva, ou seja, foram testadas todas a geometrias possíveis propostas pelo Design Construtal. O processo de otimização foi dividido em duas etapas. No primeiro passo, a geometria é otimizada variando a razão de aspecto  $L_1/L_0$  e mantendo fixos os três parâmetros geométricos:  $(\alpha, D_1/D_0$  e  $\tilde{D}_0)$ . Assim, a máxima temperatura em excesso adimensional é uma vez minimizada,  $\theta_{\max,m}$  e a correspondente razão de aspecto ótima  $L_1/L_0$  também é minimizada,  $(L_1/L_0)_o$ . E na segunda etapa, o mesmo processo foi repetido para diferentes valores de  $\alpha$  e mantendo-se fixos os dois parâmetros geométricos ( $D_1/D_0$  e  $\tilde{D}_0$ ). Dessa forma, tanto a máxima temperatura em excesso adimensional quanto a razão de aspecto  $L_1/L_0$  foram minimizadas duas vezes, ou seja, foram obtidos  $\theta_{\max,mm}$  e  $(L_1/L_0)_{oo}$ . Já o ângulo  $\alpha$  foi minimizado apenas uma vez,  $\alpha_o$ .

Inicialmente, foram assumidos os seguintes parâmetros para a simulação:  $\phi = 0, 2, \tilde{k}_p = 300, \alpha = 60^\circ, 70^\circ$  e  $80^\circ, \tilde{D}_0 = 0, 29, D_1/D_0 = 0, 36$ . A Figura 2 mostra que existe uma razão de aspecto ótima que minimiza máxima temperatura em excesso adimensional para cada  $\alpha$  estudado.

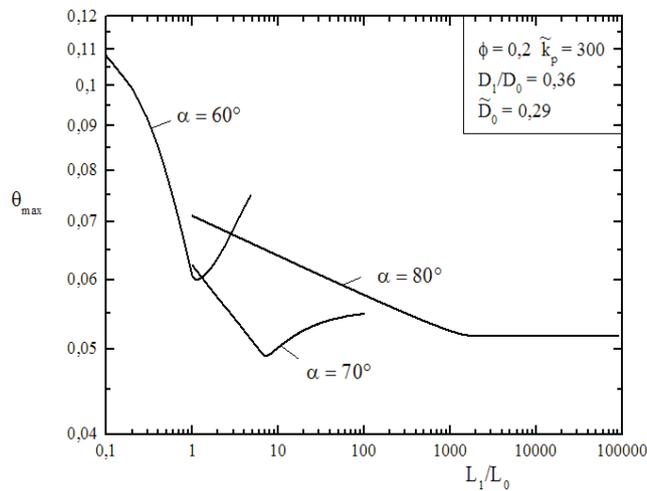


Figura 2: Primeira otimização: efeito da razão de aspecto  $L_1/L_0$ .

O processo utilizado para obter os resultados mostrados na Figura 2 foi repetido para diferentes valores de  $\alpha$  e variando a razão de aspecto  $(L_1/L_0)_o$ . A máxima temperatura em excesso adimensional  $\theta_{\max,m}$  obtida na segunda etapa do processo de otimização, variando  $(L_1/L_0)_o$ , é mostrada na Figura 3. O melhor desempenho foi obtido na região definida entre  $71^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$  e o valor ótimo ocorre em  $\alpha_o = 73^\circ$ , dado que o subscrito “o” indica que o ângulo foi otimizado uma vez. A Figura 3 mostra que existe uma relação ótima  $(L_1/L_0)_{oo} = 75, 1$  que minimiza a máxima temperatura em excesso adimensional,  $\theta_{\max,mm} = 0, 044914$  em  $\alpha_o = 73^\circ$ . A configuração ótima, com  $\alpha_o = 73^\circ$  é comparada com a pior configuração ( $\alpha = 60^\circ$ ) e resulta em uma diminuição de aproximadamente 25% na máxima temperatura em excesso adimensional.

A configuração que mais facilita o fluxo de calor obtida na Figura 3 para  $\alpha = 73^\circ$  é

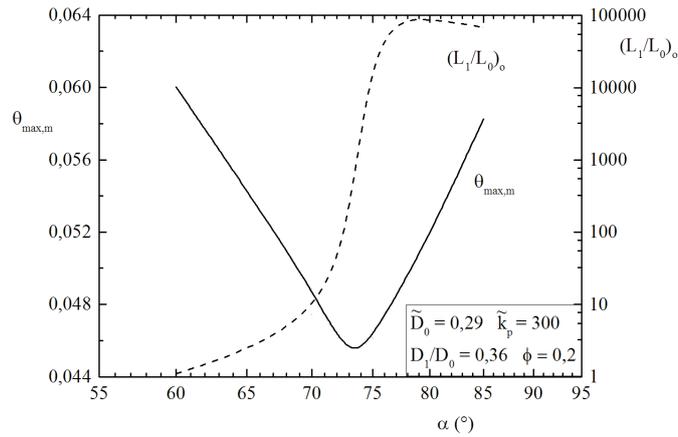


Figura 3: Segunda otimização: efeito do ângulo  $\alpha$ .

mostrada na Figura 4(b).

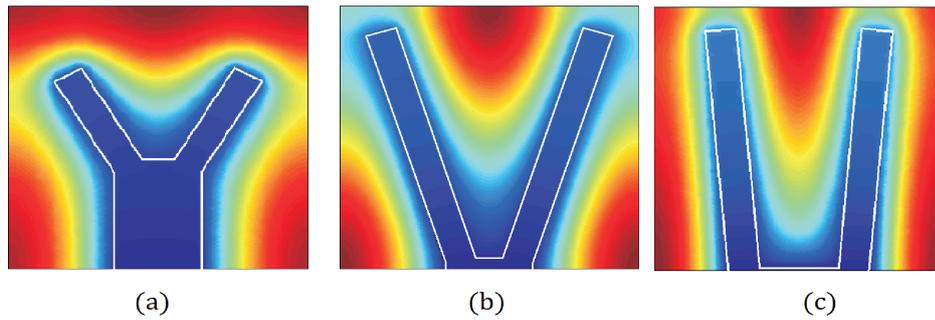


Figura 4: a)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $L_1/L_0 = 1,1$  e  $\theta_{\max} = 0,060025$  b)  $\alpha = 73^\circ$ ,  $L_1/L_0 = 75,1$  e  $\theta_{\max} = 0,044914$  c)  $\alpha = 85^\circ$ ,  $L_1/L_0 = 67000$  e  $\theta_{\max} = 0,058253$ .

Nota-se que a configuração mostrada na Figura 4(b) redistribui as imperfeições, isto é, os pontos quentes, de acordo com o princípio da ótima distribuição das imperfeições conforme o princípio Construtal [4]. As Figuras 4(a) e 4(c) apresentam outras configurações otimizadas somente para o grau de liberdade  $L_1/L_0$ .

## 4 Conclusões

Este trabalho aplicou o método Design Construtal para obter a arquitetura que maximize o desempenho das vias em forma de Y de um material de alta condutividade incorporado no corpo de menor condutividade que gera calor uniformemente. A análise realizada minimizou duas vezes a máxima temperatura em excesso adimensional, considerando os dois graus de liberdade definidos para a configuração,  $L_1/L_0$  e  $\alpha$ , para uma fração de área constante,  $\phi = 0,2$  e  $k_p = 300$ . Os resultados apontam que  $\alpha$  tem um

grande efeito sobre  $\theta_{\max,mm}$ , isto é, a configuração com  $\alpha = 73^\circ$  tem um desempenho 25% melhor quando comparado com a configuração em que  $\alpha = 60^\circ$  que é a configuração que tem o pior desempenho entre as configurações otimizadas uma vez. Os resultados também mostram que o Design Construtal é um método confiável na busca de configurações ótimas que facilitam o fluxo de calor.

## Agradecimentos

Luiz A. O. Rocha, Liércio A. Isoldi, Elizaldo D. dos Santos e Cássia C. Beckel agradecem o suporte financeiro do CNPq, Brasília, DF.

## Referências

- [1] A. Bejan. *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [2] R. Boichot, L. Luo, and Y. Fan. Tree-network structure generation for heat conduction by cellular automaton, *Journal Energy Conversion and Management*, 50:376–386, 2019.
- [3] Y. A. Çengel and A. J. Ghajar. *Heat & Mass Transfer: A Practical Approach*. MC Graw-Hill, New York, 2012.
- [4] A. Bejan., and S. Lorente. *Design with Constructal Theory*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.
- [5] A. Bejan., and S. Lorente. Constructal law of design and evolution: Physics, biology, technology, and society, *Journal of Applied Physics*, 113:301–321, 2013.
- [6] A. Bejan., and J. P. Zane. *Design in Nature*. Doubleday, New York., 20012.
- [7] A. Bejan. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume, *Journal Heat Mass Transfer*, 40:799–816, 1997.
- [8] G. Lorenzini, C. Biserni, and L.A.O. Rocha. Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, 58:513–520, 2013.
- [9] G. Lorenzini, C. Biserni, and L.A.O. Rocha. Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body, *Int. Journal of Thermal Sciences*, 71:140–147, 2013.
- [10] C.S. Horbach, E.D.Dos Santos, L.A. Isoldi, and L.A.O. Rocha. Constructal design of Y-shaped pathways for cooling a heat-generating body, *Defect and Diffusion Forum*, 348:245–260, 2014.
- [11] MatLab. *User's Guide, Version 6.0.088, Release 12*. The Mathworks Inc., 2000.