Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Construção dos Reticulados A_2 e D_4 via Homomorfismo de Minkowski

Mylena Verona das Neves[1]
UNESP, Bauru, SP
Agnaldo José Ferrari[2]
UNESP, Bauru, SP

Introdução

Com o avanço na área das Telecomunicações um grande esforço vem sendo realizado com o objetivo de melhorar a qualidade da informação transmitida aliada à baixa probabilidade de erro [1, 2]. Uma abordagem muito interessante foi feita utilizando resultados da Teoria Algébrica dos Números [11]. A partir de corpos de números totalmente reais são obtidos reticulados representando constelações de sinais com boa performance quando utilizados em canais Gaussianos e com desvanecimento do tipo Rayleigh [1, 3–10], uma vez que reticulados obtidos nesses corpos possuem boa densidade de empacotamento e diversidade máxima nos respectivos canais, parâmetros importantes quando estamos interessados em transmissões com baixa probabilidade de erros.

Para obter uma constelação eficiente deve-se buscar reticulados densos com diversidade máxima e distância produto mínimo grande. É possível definir um homomorfismo do corpo de números $\mathbb{K}$ no $\mathbb{R}^n$, de maneira que a imagem deste homomorfismo seja um reticulado no $\mathbb{R}^n$ [1, 3]. Um reticulado é o conjunto das combinações lineares inteiras de m vetores linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, do $\mathbb{R}^n$ $(m \leq n)$ [4].

Objetivos

O objetivo é a construção dos reticulados A_2 e D_4, os quais possuem dimensão 2 e 4, respectivamente. Estes dois reticulados serão construídos via Homomorfismo de Minkowski, uma aplicação que possui o corpo de números $\mathbb{K}$ como domínio e o $\mathbb{R}^n$ como contradomínio. A imagem de $\mathbb{Z}$-módulos contidos em $\mathbb{K}$, via Homomorfismo de Minkowski, são reticulados no $\mathbb{R}^n$ [3, 5].

A construção a partir deste método possibilita definir alguns parâmetros importantes dos reticulados, como por exemplo, matriz geradora, matriz de Gram, determinante do reticulado, densidade de centro e raio de empacotamento [4].

Resultados

Para a construção dos reticulados A_2 e D_4, a partir do método proposto, foram utilizados subcorpos maximais reais de corpos ciclotômicos. Os reticulados A_2 e D_4 são reticulados com

[1] mylena.verona@unesp.br.
[2] agnaldo.ferrari@unesp.br

densidade de empacotamento ótima em dimensão 2 e 4, respectivamente. Estes reticulados são os únicos mais densos em suas respectivas dimensões, isso possibilita a construção de reticulados equivalentes a partir destes, por exemplo, basta realizar rotações (ou reflexões) e escalonamentos. A rotação (ou reflexão) de uma constelação de sinais possibilita aumentar a diversidade e consequentemente diminuir a probabilidade de erro quando utilizarmos o canal com desvanecimento do tipo Rayleigh.

Um ponto significativo sobre a construção de constelações de sinais baseadas em reticulados é sua performance em canais diferentes. O canal Gaussiano, onde constelações eficientes são representadas por reticulados com boa densidade de empacotamento, e o Canal com desvanecimento do tipo Rayleigh, onde constelações eficientes são aquelas representadas por reticulados com diversidade máxima e boa distância produto mínima.

As famílias de reticulados construídas apresentam bom desempenho para ambos os canais, sendo suportes para a construção de outras eficientes constelações de sinais.

Referências

[1] Bayer-Fluckiger, E. Lattices and number fields, *Contemp. Math*, 241:69-84, 1999. ISSN: 0271-4132.

[2] Benedetto, S., Biglieri, E. *Principles of Digital Transmission With Wireless Applications.* Kluwer Academic - Plenum Publishers, New York, 1999.

[3] Boutros, J., Viterbo, E., Rastello, C. and Belfiore, J. C. Good Lattice Constellations for both Rayleigh Fading and Gaussian Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(2):502-518, 1996. DOI:10.1109/18.485720.

[4] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A. *Sphere Packings, Lattices and Groups, 3rd edition.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[5] Ferrari, A. J. Reticulados Algébricos: Abordagem matricial e simulações, Tese de Doutorado, Unicamp, 2012.

[6] Ferrari, A. J. and Andrade, A. A. Constructions of rotated lattice constellations in dimensions power of 3, *J. Algebra and its Appl.*, 17(9):185075, 2018. DOI:10.1142/S021949881850175X.

[7] Ferrari, A. J. and Andrade, A. A. Algebraic lattices via polynomial rings, *Computational & Applied Mathematics*, 38(163), 2019. DOI:10.1007/s40314-019-0948-8.

[8] Ferrari, A. J. and Souza, T. M. R. Rotated A_n-lattice codes of full diversity, *Advances in Mathematics of Communications (Online)*, 2020. DOI:10.3934/amc.2020118.

[9] Jorge, G. C., Ferrari, A. J. and Costa, S. I. R., Rotated D_n-lattices. *Journal of Number Theory*, 132(11):2397-2406, 2012. DOI:10.1016/j.jnt.2012.05.002.

[10] Oggier, F. and Bauer-Fluckiger, E. Best rotated cubic lattice constellations for Rayleigh fading channel. *Proc. Int. Symposium of Information Theory - ISIT 2003*, Yokohama, Japan, 2003.

[11] Samuel, P. *Algebraic theory of numbers.* Herman, Paris, 1967.