Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um método multiescala recursivo para problemas parabólicos lineares

Larissa Macul[1]
Eduardo Abreu[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP
Paola Ferraz[3]
Grupo de Computação Científica - LNLS, CNPEM, Campinas, SP

Neste trabalho estendemos o Recursive Multiscale Mixed Method (RMuMM) [1, 2] para problemas parabólicos lineares. O RMuMM é um método misto multiescala baseado em técnicas de decomposição de domínio onde soluções locais (ou funções de base multiescala) são resolvidas por MHFEM (Mixed Hybrid Finite Element Method) em cada subdomínio na escala fina h e acopladas por meio de de condições de Robin. Tais condições são definidas em uma escala mais grossa, chamada escala $\bar{H}$, nas interfaces dos subdomínios tal que $h < \bar{H} < H$, onde H é a escala dos subdomínios. Para mais detalhes ver [1, 2].

Modelagem e Discretização: Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{R}^d, d = \{2, 3\}$, com fronteira Lipschitz $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ e $T > 0$. Consideramos o seguinte problema parabólico linear

$$\begin{array}{llll} \beta\dfrac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot(A\nabla p) = f, & \text{em } \Omega\times(0,T], & p(\mathbf{x},0) = g_0, & \text{em } \Omega, \\ -\nabla p\cdot n = g_N, & \text{sobre } \Gamma_N\times(0,T], & p = g_D, & \text{sobre } \Gamma_D\times(0,T], \end{array} \tag{1}$$

onde $p = p(\mathbf{x}, t)$, $\beta = \beta(\mathbf{x})$, $A = A(\mathbf{x})$, e $f = f(\mathbf{x}, t)$ e n é a normal externa à fronteira $\partial\Omega$.

A resolução numérica do problema (1) é dada pela utilização do Método Implícito Euler recuado para a discretização temporal e o RMuMM para a discretização espacial. Como estratégia de aproximação temos a cada passo de tempo um problema elíptico linear ser resolvido, e as funções de base multiescala não precisam ser recalculadas. Dessa forma construímos o método PRMuMM (Parabolic Recursive Multiscale Mixed Method).

Experimentos Numéricos: Para validar o PRMuMM consideramos dois problemas modelados pela Eq. (1), na escala $\bar{H} = h$:

i) Transferência de calor em um domínio 3D. Na Figura 1 apresentamos a evolução temporal da distribuição de temperatura em um domínio de dimensão $1m \times 1m \times 1m$. Para a simulação do problema (1), consideramos os parâmetros $\beta = 3.656\text{e+}6$, $A = 1$ e condições de contorno de Dirichlet nas fronteiras das direções x e y e Neumann na direção z. Utilizamos o dado inicial $p(x, 0) = 100.0$, 4 subdomínios com $30 \times 30 \times 60$ elementos, o tempo final de simulação $T = 10s$ e intervalo de tempo $\Delta t = 1s$. Chegamos em uma solução final compatível com o estado estacionário.

ii) Escoamento de fluido em um domínio heterogêneo 2D. Na Figura 1 apresentamos tempos da evolução do fluxo em um reservatório. Utilizamos os parâmetros $\beta = 0.07$ e A é dado por uma permeabilidade altamente heterogênea, do *Dataset SPE10 (https://www.spe.org/web/csp/index.html)*. Condições de contorno foram impostas tal que $\nabla p\cdot n = 10$ na fronteira à esquerda e pressão nula na

[1] l171698@dac.unicamp.br
[2] eabreu@unicamp.br
[3] paola.ferraz@lnls.br

fronteira à direita. Nas outras fronteiras, consideremos a condição de fluxo nulo. Utilizamos como dado inicial $p(x, 0) = 0.0$. Consideramos um domínio bidimensional de $1200m \times 2200m$, dividido em 4 subdomínios com 30×110 elementos e $\Delta t = 280s$.

Outros experimentos numéricos e aplicações estão disponíveis em [3].

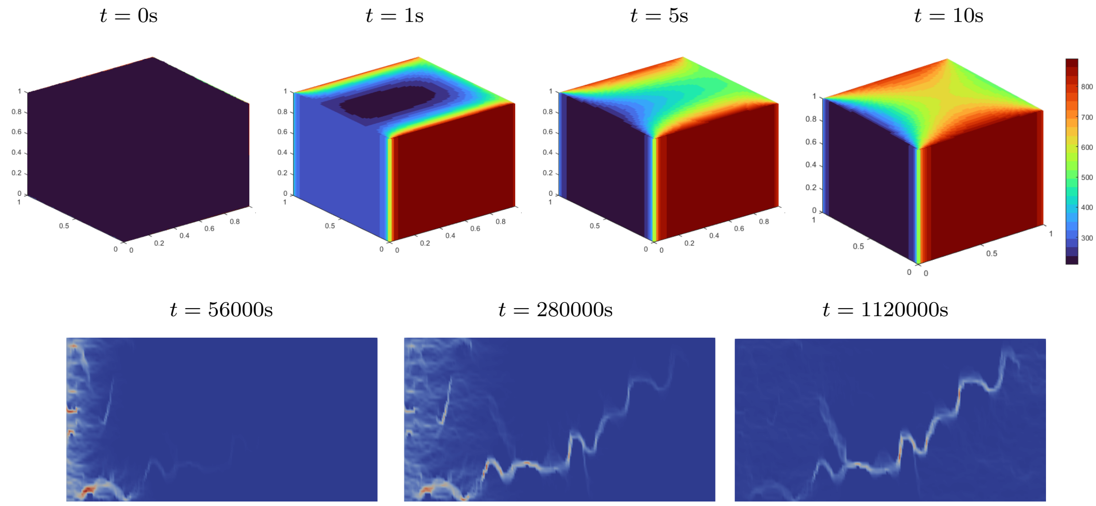

Figura 1: Alguns passos do problema de evolução temporal do problema de calor (acima), em $t = 1$ é possível observar a assimilação das condições de contorno, e escoamento de fluido (abaixo), em que o destaque é a captura do fluxo pelo canal heterogêneo. As figuras da última coluna representam a solução no tempo final de simulação, compatível ao estado estacionário.

Conclusões e Perspectivas: Com os resultados preliminares positivos do PRMuMM linear, a fase de depuração do código está finalizada. Em seguida vamos desenvolver uma extensão do PRMuMM para problemas parabólicos não lineares, usando uma estratégia preditor-corretor para linearizar os coeficientes não lineares. Estratégias de recálculo das funções de bases multiescala também serão exploradas.

Agradecimentos

Este trabalho recebeu apoio do CNPq 306385/2019-8, PETROBRAS - 2015/00398-0, CAPES e do IMECC/Unicamp. L. Macul é bolsista ME CAPES.

Referências

[1] E. Abreu, A. Espírito Santo, P. Ferraz, L. F. Pereira, L. G. C. Santos, F. Sousa. Recursive Formulation and Parallel Implementation of Multiscale Mixed Methods for subsurface flows. DOI: (to appear). http://arxiv.org/abs/2009.07965

[2] P. Ferraz. A novel recursive formulation of multiscale mixed methods and relaxation modeling of flow in porous media, Tese de Doutorado, Unicamp, 2019.

[3] L. Macul. Comparative study of high performance multiscale computational techniques in fractured and karstified reservoirs, Dissertação de Mestrado (em andamento), Unicamp, 2022.