Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método de Diferenças Finitas para solução da EDP de Poisson

Elber Mendes Gonçalves[1]
FAMAT/UFPA, Cametá, PA
Rubenvaldo Monteiro Pereira[2]
FAMAT/UFPA, Cametá, PA

1 Introdução

Soluções analíticas de Equações Diferenciais Parciais (EDP) nem sempre são possíveis, pois, tais soluções podem nem mesmo existir ou serem difíceis de se obter de forma analítica. Assim, faz-se necessário recorrer a método alternativo na busca de soluções de EDP's, como os métodos numéricos que são amplamente usados para aproximar tais soluções. Segundo Cunha [1], a essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É esta discretização que torna finito o problema e assim viabiliza sua solução através de computação numérica. Um método numérico muito utilizado para resolver EDP's chama-se método de diferenças finitas (MDF). Este tem como ideia geral a discretização da região em estudo e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função [2]. Neste trabalho, apresentamos o MDF para obtenção de solução aproximada da EDP de Poisson com condições de contorno de Dirichlet.

2 Aproximações por Diferenças finitas

Consideremos a EDP elíptica de Poisson:

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

sobre um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ dado por $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$ e $u(x,y) = g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \partial\Omega$, sendo $\partial\Omega$ a fronteira de Ω. Se f e g são contínuas em seus domínios, então esta equação tem solução única [3].

Inicialmente, escolhemos inteiros positivos n e m e definimos o tamanho do passo, h e k, como $k = \frac{d-c}{m}$ e $h = \frac{b-a}{n}$. A seguir, discretizamos a região Ω em uma malha com intervalo horizontal $[a,b]$ em n partes iguais de largura h e com intervalo vertical $[c,d]$ em m partes iguais de largura k. Feito isso, dispomos de uma malha retangular de pontos $(x,y) = (x_i, y_j)$, sendo $x_i = a + ih$ e $y_j = c + jk$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ e $j = 0, 1, \ldots, m$. Em seguida, aproximamos em cada ponto (x_i, y_j) do interior da malha as seguintes formulas de diferença centrada nas variáveis x e y:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \tag{2}$$

[1] elbermnds@gmail.com
[2] rubenp@ufpa.br

e

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j), \tag{3}$$

com $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ e $\eta \in (y_{j-1}, y_{j+1})$. As equações (2) e (3) seguem das expansões em séries de Taylor da função $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ [2]. Agora, substituindo (2) e (3) na equação (1) obtemos

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f_{i,j} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \tag{4}$$

para $i = 1, 2, ..., n-1$ e $j = 1, 2, ..., m-1$. Na forma de equação de diferença, isso resulta no MDF

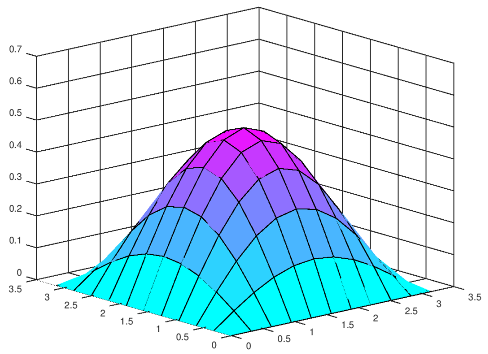
$$2[(h/k)^2 + 1]w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - (h/k)^2\,(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \tag{5}$$

onde w_{ij} se aproxima de $u(x_i, y_j)$ para $i = 1, 2, ..., n-1$ e $j = 1, 2, ..., m-1$. Este método tem erro de truncamento local de ordem $O(h^2 + k^2)$ [3]. A prova da convergência do método pode ser encontrada em [2].

3 Simulações numéricas

Para fins de simulação numérica, considere a equação de Poisson (1) com $f(x, y) = -sin(x)sin(y)$ para $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$ e condições de contorno $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$. Para aproximar as soluções foi usado a equação (5) com $n = m = 11$ e $h = k = \pi/10$. A Figura 1 ilustra a solução encontrada. A solução analítica é $u(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x)\sin(y)$ o que comparando nos dá uma precisão $||u_{aprox} - u_{exato}|| = 10^{-2}$.

Figura 1: Ilustração da solução aproximada da EDP de Poisson do exemplo usando o método de diferenças finitas.



Referências

[1] Cunha, C. *Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas, Editora da UNICAMP, 1993.*

[2] Cuminato, J. A., Junior, M. M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas.* Coleção Matemática Aplicada. SBM, 2013.

[3] Burden, R. L., Faires, J. D. *Numerical Analysis.* 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2010.

