

Avaliação de Propriedades de Reflectância e Transmitância: Um Problema de Transferência Radiativa em Meio Homogêneo Unidimensional

Patricia Rodrigues Fortes¹

Mariza Camargo²

Departamento de Engenharia e Tecnologia Ambiental, UFSM, Frederico Westphalen, RS

Solange Regina Cromianski³

Liliane Basso Barichello⁴

Instituto de Matemática e Estatística, PPGMAp - UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho uma solução é proposta para a equação de transferência radiativa em meio homogêneo unidimensional, buscando avaliar densidade de radiação e propriedades espectrais tais como reflectância e transmitância, que podem, por exemplo, estar associadas à caracterização de uma vegetação. Resultados numéricos obtidos com o método analítico de ordenadas discretas (ADO), para diferentes formulações das condições no contorno do meio, são discutidos e comparados aos de outros trabalhos que fizeram uso de métodos analíticos clássicos, no tratamento de problemas unidimensionais e homogêneos relacionados à área de transferência radiativa. A análise dos resultados mostra que a formulação ADO é precisa e computacionalmente eficiente.

Palavras-chave. Método de Ordenadas Discretas, Reflectância, Transmitância

1 Introdução

O conhecimento da interação da radiação solar com vegetações é fundamental para a interpretação de dados de sensoriamento remoto, para o desenvolvimento de metodologias de análise das informações de monitoramentos quantitativos e qualitativos e para a criação de novos sensores. A parte do organismo vegetal envolvida nessas interações é denominada dossel, constituído por um conjunto estruturado de folhas, caules, espigas e flores, conforme o tipo e as condições da vegetação. Um determinado dossel é caracterizado pela sua constituição, pelo comportamento espectral de seus componentes, sua estrutura interna e sua organização no espaço [9].

Estudos buscam modelar a transferência radiativa em copas de vegetações densas, utilizando a equação linear de Boltzmann para obter resultados numéricos das interações da

¹patricia@ufsm.br

²mariza@ufsm.br

³solange.regina@ufrgs.br

⁴lbaric@mat.ufrgs.br

radiação solar nos dosséis [5, 8]. Partindo de conceitos fundamentais que configuram a elaboração de tais modelos matemáticos, neste trabalho, partimos da formulação unidimensional e homogênea da equação de transferência radiativa, cuja solução é determinada pela aplicação do método analítico de ordenadas discretas (ADO) [2] e chegamos ao cálculo de razões como reflectância (razão entre a energia radiante refletida e a energia radiante incidente) e transmitância (razão entre a energia radiante transmitida e a energia radiante incidente) com interesse futuro no estudo de vegetações.

2 Formulação Matemática

Consideramos a formulação unidimensional da equação de transferência radiativa em meio homogêneo [4]

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu', \quad (1)$$

onde $\tau \in (0, \tau_0)$ é a variável óptica (adimensional), τ_0 o comprimento óptico do meio plano-paralelo, $\mu \in [-1, 1]$ é o cosseno do ângulo polar medido a partir do eixo τ positivo, $\varpi \in [0, 1]$ é o albedo para o espalhamento simples (relação entre o coeficiente de espalhamento e o coeficiente de extinção). Os β_s são os coeficientes da expansão da função de espalhamento escrita em termos de polinômios de Legendre, e podem ser obtidos por uma fórmula recursiva [7]

$$\beta_l = \left(\frac{2l+1}{2l-1} \right) \left(\frac{L+1-l}{L+1+l} \right) \beta_{l-1}, \quad (2)$$

para $l = 1, 2, \dots, L$, com $\beta_0 = 1$, sendo L o grau de anisotropia do problema.

Estamos considerando a solução da Eq. (1) sujeita às condições de contorno

$$I(0, \mu) = F_1(\mu) + \rho_1^s I(0, -\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad (3)$$

$$I(\tau_0, -\mu) = F_2(\mu) + \rho_2^s I(\tau_0, \mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad (4)$$

para $\mu \in (0, 1]$, $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$ são conhecidas e referem-se à distribuição de radiação incidente em ambas as fronteiras do meio, ρ_1^s e ρ_2^s são os coeficientes de reflexão especular e ρ_1^d e ρ_2^d são os coeficientes de reflexão difusa.

3 Solução em Ordenadas Discretas

De acordo com as referências [4] e [2], para se obter uma solução mediante a aplicação do ADO, reescrevemos o termo integral da Eq. (1) como

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_0^1 P_l(\mu') [I(\tau, \mu') + (-1)^l I(\tau, -\mu')] d\mu'. \quad (5)$$

Assim, a versão em ordenadas discretas da Eq. (5) fica escrita tal como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para $i = 1, 2, \dots, N$, na forma

$$\mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu_i) + I(\tau, \mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N \omega_k P_l(\mu_k) [I(\tau, \mu_k) + (-1)^l I(\tau, -\mu_k)] \quad (6)$$

e

$$-\mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, -\mu_i) + I(\tau, -\mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N \omega_k P_l(\mu_k) [I(\tau, -\mu_k) + (-1)^l I(\tau, \mu_k)], \quad (7)$$

sendo μ_k e ω_k os respectivos nós e pesos do esquema de quadratura (arbitrário), com N pontos, definido sob o intervalo $(0, 1]$.

Buscando resolver o sistema anterior, supomos uma solução escrita em termos de uma função exponencial

$$I(\tau, \pm\mu_i) = \phi(\nu, \pm\mu_i) e^{-\tau/\nu}, \quad (8)$$

que ao ser substituída nas Eqs. (6) e (7) resulta no sistema

$$\left(1 \mp \frac{\mu_i}{\nu}\right) \phi(\nu, \pm\mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N \omega_k P_l(\mu_k) [\phi(\nu, \pm\mu_k) + (-1)^l \phi(\nu, \mp\mu_k)], \quad (9)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Para introduzir uma notação matricial, definimos os vetores de ordem $N \times 1$

$$\Phi_{\pm}(\nu) = [\phi(\nu, \pm\mu_1) \ \phi(\nu, \pm\mu_2) \ \dots \ \phi(\nu, \pm\mu_N)]^T \text{ e } \Pi(l) = [P_l(\mu_1) \ P_l(\mu_2) \ \dots \ P_l(\mu_N)]^T, \quad (10)$$

as matrizes diagonais

$$M = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N\} \text{ e } W = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N\}, \quad (11)$$

bem como os vetores

$$U = \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu) \text{ e } V = \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu). \quad (12)$$

Então, a Eq. (9) pode ser escrita como

$$\left(I_N \mp \frac{1}{\nu} M\right) \Phi_{\pm}(\nu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T W [\Phi_{\pm}(\nu) + (-1)^l \Phi_{\mp}(\nu)]. \quad (13)$$

Adicionando as equações escritas em (13) (e posteriormente subtraindo as mesmas) obtemos após simplificações [4]

$$EX = \frac{1}{\nu} Y \text{ sendo } E = \left(I_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T W [1 + (-1)^l]\right) M^{-1}, \quad (14)$$

$$FY = \frac{1}{\nu}X \text{ sendo } F = \left(I_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T W [1 - (-1)^l] \right) M^{-1}, \quad (15)$$

onde

$$X = MU \text{ e } Y = MV. \quad (16)$$

Para estabelecer o problema de autovalores, prosseguimos de forma a isolar Y na Eq. (14) para então substituí-la na Eq. (15). Assim

$$(FE)X = \lambda X \text{ onde } \lambda = \frac{1}{\nu^2}. \quad (17)$$

O problema de autovalor obtido nesta formulação está baseado apenas nos pontos positivos da quadratura. Sendo assim, apresenta ordem reduzida (ordem $N/2$) se comparado aos obtidos nas aproximações de ordem N das metodologias usuais de emprego do Método de Ordenadas Discretas.

Das Eqs. (14) e (15), podemos escrever:

$$\Phi_+(\nu_j) = \frac{1}{2}M^{-1}(I_N + \nu_j E)X(\nu_j) \text{ e } \Phi_-(\nu_j) = \frac{1}{2}M^{-1}(I_N - \nu_j E)X(\nu_j). \quad (18)$$

Tendo calculado os autovalores e autovetores dados pela Eq. (17), e com a determinação das soluções elementares $\Phi_+(\nu_j)$ e $\Phi_-(\nu_j)$, escrevemos a solução da Eq. (1) na forma

$$I_{\pm}(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-\tau/\nu_j} + B_j \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-(\tau_0 - \tau)/\nu_j} \right], \quad (19)$$

onde τ_0 é a espessura óptica do problema, ou de acordo com a notação matricial

$$I_{\pm}(\tau) = (I(\tau, \pm\mu_1) I(\tau, \pm\mu_2) \dots I(\tau, \pm\mu_N))^T. \quad (20)$$

Para finalizar a composição da solução, precisamos ainda determinar os coeficientes A_j e B_j , para $j = 1, \dots, N$, que são obtidos mediante substituição da Eq. (19) em ambas as condições de contorno dadas pelas Eqs. (3) e (4). Obtemos assim, o seguinte sistema linear de ordem $2N \times 2N$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_+(\nu_j) + B_j \Phi_-(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] - \rho_1^s \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_-(\nu_j) + B_j \Phi_+(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] \\ & - 2\rho_1^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[A_j \phi(\nu_j, -\mu_k) + B_j \phi(\nu_j, \mu_k) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] = F_1(\mu_i), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_-(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \Phi_+(\nu_j) \right] - \rho_2^s \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_+(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \Phi_-(\nu_j) \right] \\ & - 2\rho_2^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[A_j \phi(\nu_j, \mu_k) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \phi(\nu_j, -\mu_k) \right] = F_2(\mu_i), \end{aligned} \quad (22)$$

para $i = 1, \dots, N$ e $\mu \in (0, 1]$. Nestas equações, as expressões vetoriais $F_1(\mu_i)$ e $F_2(\mu_i)$ possuem seus componentes definidos em função da radiação incidente (conhecida), $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$, respectivamente. A escrita das Eqs. (21) e (22) complementa a referência [4] em termos da formulação ADO para problemas unidimensionais e homogêneos relacionados à área de transferência radiativa.

4 Problemas Teste e Resultados Numéricos

A partir da determinação da intensidade de radiação $I(\tau, \mu)$, podemos então avaliar, por exemplo, a densidade de radiação [4]

$$\rho(\tau) = \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu, \quad (23)$$

que em termos da solução em ordenadas discretas dada pela Eq. (19), passa a ser escrita como

$$\rho(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[A_j e^{-\tau/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_0 - \tau)/\nu_j} \right] \sum_{i=1}^N w_i \left[\phi(\nu_j, \mu_i) + \phi(\nu_j, -\mu_i) \right]. \quad (24)$$

Segundo a referência [5], definimos reflectância como a razão entre a energia radiante refletida e a energia radiante incidente. Assim

$$R = \frac{\int_0^1 \mu I(0, -\mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu}, \quad (25)$$

que em ordenadas discretas, de acordo com dados do problema 2 especificado a seguir, pode ser escrito como

$$R = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N \left[A_j \phi(\nu_j, -\mu_i) + B_j \phi(\nu_j, \mu_i) e^{-\tau_0/\nu_j} \right]. \quad (26)$$

Ainda de acordo com a referência [5], definimos transmitância como a razão entre a energia radiante transmitida e a energia radiante incidente. Assim

$$T = \frac{\int_0^1 \mu I(\tau_0, \mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu}, \quad (27)$$

cuja expressão equivalente em ordenadas discretas (segundo dados do Problema 2) é

$$T = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N \left[A_j \phi(\nu_j, \mu_i) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \phi(\nu_j, -\mu_i) \right]. \quad (28)$$

Para validação da solução obtida pelo método ADO [2], testamos problemas que se diferenciam pelas formulações de suas condições de contorno, escolhidos especificamente por

já terem sido avaliados por métodos analíticos. Para testar a programação em FORTRAN formulada para este trabalho, reproduzimos os casos teste com os mesmos parâmetros utilizados respectivamente nas referências [3] e [4] para cálculo de densidade de radiação, onde também se fez uso do método ADO [2], e chegamos exatamente aos mesmos resultados numéricos. Em sequência, buscamos ampliar a proposta apresentada em [3] e [4], assumindo valores diferenciados para as radiações incidentes $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$ (Problema 1), além de que implementamos neste trabalho cálculos de reflectância e transmitância (Problema 2). Os autovalores e autovetores que compõem a solução apresentada foram obtidos mediante uso da subrotina RG do pacote de subrotinas EISPACK-LINPACK.

Problema 1. Para compor este caso teste onde avaliamos a Eq. (24), consideramos as condições de contorno completas, com inclusão de reflexão especular e difusa. Tal como na referência [1] adotamos o parâmetro $L = 99$ (caso anisotrópico), comprimento óptico $\tau_0 = 10$, albedo $\varpi = 0.99$, $\rho_1^s = 0.1$, $\rho_1^d = 0.2$, $\rho_2^s = 0.3$, $\rho_2^d = 0.4$, com radiações incidentes: $F_1(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2} + \frac{1}{1 + \mu^2} + \mu \log(\mu)e^{-\mu}$ e $F_2(\mu) = 0$. Na referência [1] os autores utilizaram o clássico método P_N , cujos valores para a densidade de radiação lá expostos (Tabela 1) com $N = 199$ puderam ser totalmente reproduzidos via método ADO a partir de $N = 30$.

Problema 2. Na formulação deste teste, consideramos três diferentes valores para o albedo ($\varpi = 0.2, 0.8$ e 0.995), assumindo $L = 0$ (caso isotrópico), $\rho_1^s = \rho_1^d = \rho_2^s = \rho_2^d = 0$, radiações incidentes $F_1(\mu) = 1$ e $F_2(\mu) = 0$. Aqui, fizemos a avaliação de reflectância e transmitância, dadas respectivamente pelas Eqs. (26) e (28).

Os resultados obtidos via ADO na avaliação das Eqs. (26) e (28) considerando seis valores para o comprimento óptico ($\tau_0 = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ e 10.0), foram comparados aos da referência [5] (caso em que o albedo é considerado uniforme) onde foi usado o método aproximado F_n .

Na referência [5] é observada uma precisão de quatro a cinco dígitos obtidos pela aproximação F_7 , cuja ordem não tem relação direta com a ordem de quadratura em ordenadas discretas. Neste trabalho, reproduzimos estes mesmos valores a partir de $N=12$, a menos dos resultados para $\tau_0 = 0.1$ e $\tau_0 = 0.5$, cujas discrepâncias ocorrem apenas em alguns dos dois últimos dígitos apresentados nos resultados correspondentes a estes dois comprimentos ópticos específicos. Variações de resultados para $\tau_0 = 0.1$ também foram observadas por Clements e Özişik quando os autores compararam os resultados que obtiveram com outros trabalhos de abordagens exatas. Observa-se que mesmo aumentando o valor de N (testados $N = 20, N = 50, N = 100$ e $N = 200$) não ocorrem alterações nos resultados obtidos via método ADO.

5 Conclusões

Ressaltamos que os casos teste das referências [3] e [4] e ambos os Problemas 1 e 2 já haviam sido analisados através do método ADO em [6]. Contudo, os resultados para reflectância e transmitância com $N < 10$ da referência [6] não se equivalem aos valores obtidos neste trabalho onde a convergência de três dígitos já é assegurada a partir de $N = 6$. Há um comentário na referência [6] que revela possibilidade de erro de implementação da solução ADO tendo em vista a inconsistência de valores obtidos naquele trabalho para

$N < 10$, fato que agora ficou comprovado.

Assim, em função dos bons resultados alcançados na resolução dos diferentes casos abordados neste trabalho, pretendemos prosseguir estudando a aplicabilidade do método ADO [2] na solução de problemas de transferência radiativa. Para trabalho futuros, serão considerados problemas unidimensionais com termos de fonte (não homogêneos), fato que trará a associação de soluções particulares à solução aqui apresentada. Tais modificações devem tornar possível o cálculo de reflectância especificamente para vegetações, bem como absorção da radiação (transmitância) pelo solo.

Referências

- [1] L. B. Barichello, R. D. M. Garcia and C. E. Siewert, On Inverse Boundary-Condition Problems in Radiative Transfer, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 57:405–410, 1997.
- [2] L. B. Barichello and C. E. Siewert, A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model with Complete Frequency Redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:665–675, 1999.
- [3] L. B. Barichello. Discrete Ordinates Solutions for Thermal Radiation Problems. *METTI IV - Thermal Measurements and Inverse Techniques*. Rio de Janeiro, 2009.
- [4] L. B. Barichello. Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems. In: H. R. B. Orlande, O. Fudyn, D. Maillat, R. M. Cotta (Org.). *Thermal Measurements and Inverse Techniques*. Boca Raton: CRC Press, pages 541-562, 2011.
- [5] T. B. Clements and M. N. Özışık, Effects of Stepwise Variation of Albedo on Reflectivity and Transmissivity of an Isotropically Scattering Slab, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26:1419–1426, 1983.
- [6] L. R. Godinho, Modelagem de Transferência Radiativa em Vegetações. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- [7] N. J. McCormick and R. Sanchez, Inverse Problem Transport Calculations for Anisotropic Scattering Coefficients, *Journal of Mathematical Physics*, 22:199–208, 1981.
- [8] P. Picca, R. Furfaro and B. D. Ganapol, On Radiative Transfer in Dense Vegetation Canopies. *Transport Theory and Statistical Physics*, 41:223-244, 2012. DOI: 10.1080/00411450.2012.671218.
- [9] M. M. Valeriano. Reflectância Espectral de Culturas Agrícolas Anuais (I): Espectrorradiometria. *Espaço & Geografia*, 6:1-22, 2003. ISSN: 1516-9375.