Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Passeios aleatórios e o modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$

José Manuel Jaramillo Toro[1]
Mary Luz Rodiño Montoya[2]
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
Pablo Martin Rodriguez[3]
Universidade Federal do Pernambuco (CCEN), Recife, Brasil

1 Introdução

Neste trabalho estudamos o modelo dos sapos, o qual é um modelo de passeios aleatórios interagentes. Tal modelo é uma Cadeia de Markov tendo varias interpretações, sendo uma delas a da propagação de uma informação em uma população, ver [3]. Para o estudo iniciamos com uma análise do comportamento do passeio aleatório, o qual é definido da seguinte forma: Sejam $X_1, X_2, \dots$, variáveis aleatórias independentes distribuídas identicamente com distribuição $\mathbb{P}[X_1 = 1] = p$ e $\mathbb{P}[X_1 = -1] = 1 - p$. Se $S_0 := 0$ e, para $n \geq 1$, $S_n := S_{n-1} + X_n$, o processo estocástico $(S_n)_{n\geq 0}$ é chamado de passeio aleatório em $\mathbb{Z}$, ver [1]. Note que as probabilidades de transição de $(S_n)_{n\geq 0}$ são:

$$\mathbb{P}[S_{n+1} = j | S_n = i] = \begin{cases} p & se \quad j = i + 1, \\ \\ 1 - p & se \quad j = i - 1. \end{cases}$$

Podemos interpretar este processo a partir de uma partícula que realiza uma passeio pelos inteiros escolhendo sempre dar um pulo em uma posição à direita com probabilidade p, ou à esquerda com probabilidade $1 - p$. O processo estocástico resume a sequência de posições desta partícula. Responderemos uma pergunta interessante: há alguma chance de que a partícula nunca volte à sua posição inicial? Para dar resposta a esta pergunta matematicamente definimos a variável aleatória $\tau_0 := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$, com a convenção que $\tau_0 = \infty$ se o ínfimo não for atingido. Então o que vamos responder é se $\mathbb{P}[\tau_0 = \infty | X_0 = 0] > 0$ ou $\mathbb{P}[\tau_0 < \infty | X_0 = 0] = 1$. É dizer, existe uma probabilidade positiva de que a partícula não retorne ao vértice 0 ou, ao contrário, se a partícula retornará a 0 com probabilidade 1. Ao longo deste trabalho, veremos que a resposta depende de p, e assim falar sobre os dois comportamentos que um passeio aleatório pode ter.
Quando $p \neq \frac{1}{2}$ vamos concluir que:

$$\mathbb{P}[\tau_0 = \infty | X_0 = 0] > 0$$

e portanto o passeio aleatório é transitório, e quando $p = \frac{1}{2}$ vamos concluir que:

$$\mathbb{P}[\tau_0 < \infty | X_0 = 0] = 1$$

pelo qual o passeio aleatório é recorrente.

[1] manuel.jaramillo@udea.edu.co
[2] mary.rodino@udea.edu.co
[3] pablo@de.ufpe.br

Estudaremos em profundidade o caso unidimensional, ou seja, quando nosso passeio estiver em $\mathbb{Z}$. Para isto usaremos uma abordagem construtiva, diferente à usualmente apresentada nos livros de texto, estudando o passeio aleatório na sequência: Intervalo inteiro, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}$. Logo, fazendo uso do **teorema do Pólya** estudaremos os dois comportamentos no caso multidimensional, ou seja, quando o passeio está em $\mathbb{Z}^d$ com $d \geq 2$.

2 Modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$

A partir dos resultados para o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$, discutiremos a noção de recorrência para o modelo dos sapos. Este modelo pode ser interpretado por um sistema que formado por um número infinito de partículas realizando passeios aleatórios independentes em $\mathbb{Z}$. Em particular, consideramos o modelo como definido em [2]. O modelo pode ser descrito informalmente da seguinte maneira: No instante 0, o vértice 0 tem uma partícula ativa enquanto que cada vértice $x \neq 0$ tem um número η_x de partículas inativas. Cada partícula ativa realiza um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$. No momento em que uma partícula ativa pula para um vértice ocupado por partículas inativas, todas estas últimas ativam-se e iniciam passeios aleatórios independentes em $\mathbb{Z}$. Para este modelo, diz-se que o modelo é recorrente se o vértice 0 é visitado infinitas vezes por partículas ativas. Um teorema importante que foi considerado neste trabalho é o seguinte:

Teorema 1. *(Gantert e Schmidt, 2009) Vamos considerar o modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$ com configuração inicial η e probabilidade de salto à direita $p \in (1/2, 1)$. O modelo é recorrente se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p} \right)^i = \infty$$

Faremos uma prova detalhada deste teorema e discutiremos possíveis variantes e aplicações do modelo.

Agradecimentos

Este trabalho faz parte da monografia de graduação de José Manuel Jaramillo Toro da UdeA na Colômbia, sob a orientação de Mary Luz Rodiño (UdeA) e a coorientação de Pablo M. Rodriguez (UFPE).

Referências

[1] Acero, L.C. Introducción a los procesos estocásticos, *Universidad de Antioquia.*, 2020, ISBN:9789587149395.

[2] Gantert, N. y Schmidt, P. Recurrence for the frog model with drift on $\mathbb{Z}$, Markov Process, *Related Fields 15 n.1*, 2009, 51-58.

[3] Lebensztayn, E. y Rodríguez, P.M. A connection between a system of random walks and rumor transmission,*Phys. A 392 n.23*, 2013, 5793 -5800.