Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de um modelo de seleção de carteiras de investimentos e seus duais

Patricia Reis Martins[1]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Patrícia Nunes da Silva[2]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Carlos Frederico Vasconcellos[3]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O princípio de maximização da utilidade esperada está sempre subjacente aos modelos de seleção de carteiras de investimento. Na dedução dos modelos, são considerados momentos centrais da distribuição de retornos dos ativos e é feita uma análise do comportamento da função utilidade em relação a esses momentos. Essa análise é conduzida sob a condição *ceteris paribus* ("tudo o mais constante") e são obtidos os problemas de otimização associados aos modelos. Além da discussão sobre existência de solução, os economistas estão interessados na caracterização de regiões em que o problema de otimização e seus duais estejam bem postos. Discutiremos a região de dualidade do problema de minimização da variância quando estão fixados o retorno e a assimetria e seus duais: maximização da assimetria quando estão fixados o retorno e a variância e maximização do retorno quando estão fixados a variância e a assimetria. Analisaremos aqui essa região de interesse através de uma análise de sistemas lineares associados aos multiplicadores desses três problemas de otimização. Faremos uma caracterização completa dos sistemas incluindo os casos degenerados.

Palavras-chave. Modelos de seleção de carteiras de investimento, Momentos de ordem superior, Fronteira eficiente

1 Introdução

A máxima "não coloque todos os ovos em uma mesma cesta" norteia os investidores ao decidirem como distribuir seu capital entre as aplicações financeiras que compõem sua carteira de investimento (ou portfólio). Em 1952, o economista Markowitz [3] apresentou um modelo matemático que confirma esta máxima: ao investir, é fundamental diversificar. Usando os parâmetros média e variância observados nos retornos dos ativos, ele determinou a melhor escolha para a distribuição do capital a ser investido de acordo com o perfil de risco do investidor. Contudo, estudos posteriores apontaram para inconsistências neste modelo visto que a distribuição dos retornos de ativos raramente segue um padrão de distribuição normal. Sendo assim, seria necessário considerar além da média e variância, outros parâmetros como a assimetria e a curtose da distribuição dos retornos nestes ativos. Diversos trabalhos de pesquisa discutem a incorporação de momentos de ordem superior a modelos de seleção de carteiras eficientes. Athayde e Flôres [1] modelaram o problema de seleção de carteiras eficientes, utilizando os parâmetros de média, variância e assimetria da distribuição dos retornos.

[1]patriciarm75@yahoo.com.br.
[2]nunes@ime.uerj.br.
[3]cfredvasc@ime.uerj.br.

O princípio de maximização da utilidade esperada está sempre subjacente aos modelos de seleção de carteiras de investimento. Além disso, os problemas de otimização associados a esses modelos correspondem à análise do comportamento da função utilidade em relação a cada um dos momentos considerados sob a condição *ceteris paribus* ("tudo o mais constante"). Desse modo, além da discussão sobre existência de solução, os economistas estão interessados na caracterização de regiões em que o problema de otimização e seus duais estejam bem postos.

Analisaremos aqui a região de dualidade através de uma análise de sistemas lineares associados aos multiplicadores de três problemas de otimização. Faremos uma caracterização completa dos sistemas incluindo os casos degenerados. Nossa análise se baseia fundamentalmente na caracterização da independência linear dos gradientes das restrições associadas a cada um dos problemas de otimização. A caracterização da fronteira eficiente é um problema duro. A discussão sobre a dualidade a partir dos sistemas lineares associados aos multiplicadores dos problemas condicionados de minimização da variância e seu duais permite uma compreensão mais profunda da conexão entre esses três problemas de otimização.

2 Momentos de ordem superior

Em resposta à necessidade de incorporar momentos de ordem superior a modelos de seleção de carteiras de investimento, Athayde e Flôres [1] propuseram o seguinte modelo para n ativos de risco e um livre de risco

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha} \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha \in F \end{cases} \tag{1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de pesos dos ativos com risco; e M_2 é a matriz $n \times n$ de covariâncias entre os retornos dos ativos. Tal como em [1], denotaremos por M_3 a matriz $n \times n^2$ associada ao tensor de terceiros momentos dos retornos dos ativos; cada coordenada do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é o retorno médio excedente do i-ésimo ativo de risco; $\otimes$ denota o produto de Kronecker e $F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)$ e $R = \alpha^t x\}$. Os duais do problema (1) são dados por

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \\ \alpha \in D \end{cases} \tag{2}$$

onde $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha$ e $R = \alpha^t x\}$ e

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} \alpha^t x \\ \alpha \in G, \end{cases} \tag{3}$$

onde $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \quad \text{e} \quad \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)\}$.

Em (1), a carteira ótima é obtida pela minimização da variância ($\alpha^t M_2 \alpha$) quando estão fixados os momentos de ordem um e três. Isto é, quando estão fixados os valores do retorno ($\alpha^t x$) e da assimetria ($\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)$). A existência de solução para os problemas (1) e (2) foram provadas por Martins respectivamente em [6] e [5]. Com um argumento análogo ao usado em [5], é possível provar a existência de solução para o problema (3).

As carteiras ótimas que integram a fronteira eficiente correspondem a carteiras que solucionam simultaneamente os problemas (1), (2) e (3) no sentido da dualidade. Quando pensamos na fronteira eficiente na perspectiva do espaço variância×retorno×assimetria, uma tripla $(\sigma^\star_{p^2}, \sigma^\star_{p^3}, R^\star)$ pertence à fronteira eficiente no seguinte sentido: se para uma solução $\alpha^\star$ de (1) quando os valores de assimetria e retorno são fixados respectivamente em $\sigma^\star_{p^3}$ e $R^\star$, temos que a variância mínima, isto é $(\alpha^\star)^t M_2 \alpha^\star$, é igual a $\sigma^\star_{p^2}$. Além disso:

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0364

(a) $\alpha^\star$ é solução de (2) quando os valores de variância e retorno são fixados respectivamente em $\sigma^\star_{p^2}$ e $R^\star$ e a assimetria máxima, isto é $(\alpha^\star)^t M_3(\alpha^\star \otimes \alpha^\star)$, é igual a $\sigma^\star_{p^3}$.

(b) $\alpha^\star$ é solução de (3) quando os valores de variância e assimetria são fixados respectivamente em $\sigma^\star_{p^2}$ e $\sigma^\star_{p^3}$ e o retorno máximo, isto é $(\alpha^\star)^t x$, é igual a $R^\star$.

3 Proposições e multiplicadores

Para analisar os problemas de otimização (1)-(3), utilizaremos o teorema:

Teorema 3.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $f, g_1, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$, funções contínuas. Seja x^* um extremo local restrito de f sujeita a $g(x) = 0$. Suponha que $f, g_1, \ldots, g_m$ sejam diferenciáveis em x^*. Então existem números reais $\beta_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ que não se anulam simultaneamente e são tais que*

$$\beta_0^* f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^* g'(x^*) = 0. \tag{4}$$

Mais ainda, se $g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)$ forem linearmente independentes, podemos tomar $\beta_0^* = 1$.

Consideraremos três casos:

(a) quando os $g'(x^*)$, gradientes das restrições, são linearmente independentes. Neste caso, temos o método clássico dos multiplicadores de Lagrange e (4) é satisfeita com $\beta_0^* = 1$.

(b) quando os $g'(x^*)$, gradientes das restrições, são linearmente dependentes e (4) é satisfeita com $\beta_0^* = 1$.

(c) quando os $g'(x^*)$, gradientes das restrições, são linearmente dependentes e (4) só é satisfeita com $\beta_0^* = 0$.

Denotaremos

$$\begin{aligned} A_0 &= x^t M_2^{-1} x, \\ A_2 &= x^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha), \\ A_4 &= (\alpha \otimes \alpha)^t M_3^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha); \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 4 aos problemas (1), (2) e (3) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos respectivamente sistemas para os multiplicadores de Lagrange associados:

$$\begin{bmatrix} A_4 & A_2 \\ A_2 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_0 \sigma_{p^3} \\ 2\lambda_0 R \end{bmatrix}, \qquad A_F = \begin{bmatrix} A_4 & A_2 \\ A_2 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{p^2} & R \\ R & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\gamma_0 \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \\ 3\gamma_0 A_2 \end{bmatrix}, \qquad A_M = \begin{bmatrix} \sigma_{p^2} & R \\ R & A_0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} A_4 & \sigma_{p^3} \\ \sigma_{p^3} & \sigma_{p^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\mu_1 \\ 2\mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 A_2 \\ \mu_0 \alpha^t x \end{bmatrix}, \qquad A_R = \begin{bmatrix} A_4 & \sigma_{p^3} \\ \sigma_{p^3} & \sigma_{p^2} \end{bmatrix}$$

Fazendo uso de um produto interno induzido pela matriz definida positiva M_2, é possível mostrar as seguintes proposições

Proposição 3.1. *Para todo $\alpha \in F$, os vetores x e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente independentes se e somente se* $\det A_F(\alpha) > 0$*. Além disso, se x e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes, então $M_3(\alpha \otimes \alpha)A_0 = xA_2$.*

Proposição 3.2. *Para todo $\alpha \in D$, os vetores x e $M_2\alpha$ são linearmente independentes se e somente se* $\det A > 0$*. Além disso, se x e $M_2\alpha$ são linearmente dependentes, então $RM_2\alpha = \sigma_{p^2}x$.*

Proposição 3.3. *Para todo $\alpha \in G$, os vetores $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente independentes se, e somente se,* $\det A_R > 0$*. Além disso, se $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes, então $\sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha) = A_4M_2\alpha$.*

4 Dualidade

Para discutir a dualidade, vamos considerar α, solução de (3) quando a variância foi fixada em σ_{p^2} e a assimetria, em σ_{p^3}. Denotaremos por R, o retorno máximo correspondente. Para analisar se a tripla $(\sigma_{p^2}, R, \sigma_{p^3})$ pertence à fronteira eficiente, é preciso verificar se α é solução de:

- (1) quando o retorno foi fixado em R e a assimetria, em σ_{p^3} com variância mínima correspondente igual a σ_{p^2}.
- (2) quando o retorno foi fixado em R e a variância, em σ_{p^2} com assimetria máxima correspondente igual a σ_{p^3}.

Observe que α pertence aos conjuntos factíveis F, D e G associados respectivamente aos problemas (1), (2) e (3). Em cada uma das Tabelas 1, 2 e 3, consideramos uma das possibilidades para α

(a) $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente independentes. Neste caso, pela Proposição 3.3, $\mu_0 = 1$ e $\det A_R \neq 0$.

(b) $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes e x pertence ao espaço gerado por eles. Neste caso, pela Proposição 3.3, $\det A_R = 0$ e podemos considerar $\mu_0 = 1$.

(c) $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes e x não pertence ao espaço gerado por eles. Neste caso, pela Proposição 3.3, $\det A_R = 0$ e $\mu_0 = 0$.

Em cada tabela, sob esta mesma perspectiva para os demais problemas de otimização, analisamos a viabilidade de α ser solução de (1) e (2) com as restrições indicada no início da seção. Quando não é possível haver solução simultânea, a entrada da tabela fica marcada com um traço (—). Além disso, localizamos nas tabelas a possibilidade de ocorrência da solução clássica de Markowitz, $\alpha = {}^{RM_2^{-1}x}/_{A_0}$, no modelo proposto por Athayde e Flôres [1] e seus duais.

Na Tabela 1, $\mu_0 = 1$ e $\det A_R \neq 0$. Como $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente independentes, a Proposição 3.3 garante que $\det A_R \neq 0$. Já $\det A_R \neq 0$, temos que $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ não é o vetor nulo. Pelo Teorema 4, temos $\mu_0 = 1$ e x pertence ao espaço de dimensão dois gerado por $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$. Consequentemente, como x não é o vetor nulo, pelas Proposições 3.1 e 3.2, os determinantes $\det A_F$ e $\det A_M$ não podem ser simultaneamente nulos. Deste modo,

- identificamos que não há solução simultânea dos três problemas nas condições correspondentes às interseções das segunda e terceira linhas e segunda e terceira colunas da Tabela 1.
- Por outro lado, se $\det A_F = 0$, devemos ter $\det A_M \neq 0$ e o multiplicador μ_2 associado a $M_2\alpha$ na resolução de (3) seria nulo. Além disso, o multiplicador γ_1 associado a $M_2\alpha$ na resolução de (2) também seria nulo. No caso em que $\lambda_0 = 1$, se α fosse solução de (1), é possível mostrar que ela teria que ser a solução clássica de Markowitz o que é incompatível

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0364

com $\det A_M \neq 0$. No caso em que $\lambda_0 = 0$, como o vetor x é não nulo, o multiplicador μ_1 associado a $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ na resolução de (3) seria não nulo. Além disso, como $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ não é o vetor nulo, γ_2 seria não nulo.

- Agora, se tivéssemos $\det A_M = 0$, α seria a solução clássica de Markowitz, $\det A_F \neq 0$ e o multiplicador μ_1 associado a $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ na resolução de (3) seria nulo. Além disso, o multiplicador λ_1 associado a $M_2(\alpha \otimes \alpha)$ na resolução de (1) também seria nulo. No caso em que $\gamma_0 = 1$, pelo Teorema 4, $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ seria linearmente dependente com x em contradição com o fato de $\det A_F \neq 0$. No caso em que $\gamma_0 = 0$, como o vetor x é não nulo, o multiplicador μ_2 associado a $M_2\alpha$ na resolução de (3) seria não nulo. Além disso, como x é um vetor não nulo e α é a solução clássica de Markowitz, λ_2 seria não nulo.

- Finalmente, se os três determinantes não se anulam e α fosse simultaneamente solução dos problemas (1), (2) e (3), teríamos o espaço gerado pelos vetores $M_2\alpha$, $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ e x seria de dimensão três e todos os multiplicadores associados seriam não nulos.

Tabela 1: $\det A_R \neq 0$, $\mu_0 = 1$

	$\det A_M \neq 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 0$
$\det A_F \neq 0$, $\lambda_0 = 1$	α não é Markowitz	—	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ α é Markowitz
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 1$	—	—	—
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 0$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$ $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ α não é Markowitz	—	—

Na Tabela 2, $\mu_0 = 1$ e $\det A_R = 0$. A Proposição 3.3 garante $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes. Como $\mu_0 = 1$, o vetor x pertence ao espaço gerado por $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$. Consequentemente, pelas Proposições 3.1 e 3.2, os determinantes $\det A_F$ e $\det A_M$ são nulos. Geometricamente, temos a tripla tangência entre os conjuntos factíveis. Segue de $\det A_M = 0$, que α é a solução clássica de Markowitz.

- Consequentemente, não há solução simultânea dos três problemas nas condições correspondentes à primeira linha e à primeira coluna da Tabela 2.

- Como α é a solução clássica de Markowitz e $\det A_F = 0$ e no caso $\lambda_0 = 0$ só consideramos o caso em que $M_2\alpha$ não pertence ao espaço gerado por x e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$, na terceira linha da Tabela 2, não há solução simultânea dos três problemas. Um argumento análogo mostra que na terceira coluna da Tabela 2, não há solução simultânea dos três problemas.

- Quando $\gamma_0 = \lambda_0 = 1$, temos a solução clássica de Markowitz.

Tabela 2: $\det A_R = 0$, $\mu_0 = 1$

	$\det A_M \neq 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 0$
$\det A_F \neq 0$, $\lambda_0 = 1$	—	—	—
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 1$	—	α é Markowitz	—
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 0$	—	—	—

Na Tabela 3, $\mu_0 = 0$ e $\det A_R = 0$. Em nossa convenção, isto significa que x não pertence ao espaço gerado por $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$. A Proposição 3.3 garante $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes. Como x não pertence ao espaço gerado por $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$, pelas Proposições 3.1 e 3.2, os determinantes $\det A_F$ e $\det A_M$ são não nulos. Como $\det A_M \neq 0$, segue que α não é a solução clássica de Markowitz.

- Consequentemente, não há solução simultânea dos três problemas nas condições correspondentes às segunda e terceira linhas e às segunda e terceira colunas da Tabela 3.

- Como $\det A_M \neq 0$, α não é a solução clássica de Markowitz. Como $\det A_R = 0$, $\lambda_2 = \gamma_2 = 0$. Como x é um vetor não nulo, o vetor $M_2\alpha$ também o é. Consequentemente, $\lambda_1 \neq 0$. Como $\det A_F \cdot \det A_R \neq 0$, então $\gamma_1 \neq 0$.

Tabela 3: $\det A_R = 0$, $\mu_0 = 0$

	$\det A_M \neq 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 1$	$\det A_M = 0$, $\gamma_0 = 0$
$\det A_F \neq 0$, $\lambda_0 = 1$	$\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, α não é Markowitz	—	—
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 1$	—	—	—
$\det A_F = 0$, $\lambda_0 = 0$	—	—	—

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0364

5 Conclusões

Por um lado, a análise da dualidade a partir do sistema dos multiplicadores não exige o estudo usual dos sinais dos multiplicadores como no lema de dualidade proposto por em [1] para o problema (1) ou suas versões para os problemas (2) e (3). As expressões associadas aos multiplicadores são altamente não lineares e o estudo do sinal bastante difícil. Por outro, ela claramente identifica os casos viáveis para dualidade, localiza precisamente a solução clássica de Markowitz no contexto do novo modelo proposto em [1] e também indica a possibilidade de obtenção de soluções não clássicas. Estes resultados representam avanços no entendimento da fronteira eficiente e podem contribuir para sua caracterização.

Agradecimentos

Agradecemos à Faperj pelo apoio financeiro, processos E26/210.341/2018 e E26/010.001143/2019.

Referências

[1] Athayde, G. M. e Flôres Jr., R. G. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2004. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00084-2

[2] Carathéodory, C.*Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, American Mathematical Society, Providence, 1999.

[3] Markowitz, H. Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 1952. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.

[4] Martins,P. R., Vasconcellos, C. F. e Silva, P. N. Análise de Modelos de Seleção de Carteiras de Investimento, 2014. DOI: 10.12957/cadmat.2014.14160

[5] Martins,P. R. Aplicação de Teorema de Ponto Fixo a um Modelo de Seleção de carteiras de Investimento, Dissertação de Mestrado, UERJ, 2015.

[6] Martins,P. R. Seleção de carteiras de investimento através da maximização da assimetria. Trabalho de Conclusão de Curso, UERJ, 2016.

[7] Panik, M. J. *Classical Optimization: Foundations and Extensions*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[8] ScottR. C. e Horvath, P. A. On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance, *The Journal of Finance*, 1980. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb03509.x.

